Mezoszkópikus rendszerek (Speci)

1999. febr. (II. félév)

Elektromos transzport olyan félvezető nanaszerkezetekben, melyek mérete a néhány száz nm, esetleg μm.

A mérete sokkal nagyobb az atomokénál, de nem elég nagy ahhoz, hogy „Ohmikusan" viselkedjen.

Köztes méretű → mezoszkópikus.

$$G = \frac{\sigma W}{L}$$

Vezető képesség → fajlagos; W → keresztmetszet → 2dim.; L → hossz.

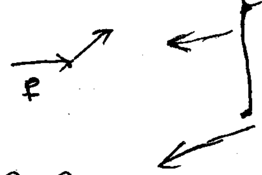
Ohmikus: méret $\gg \lambda_{de\,Broglie} \leftarrow E_F$

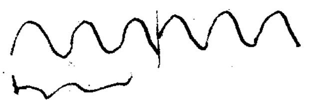
$\gg \ell = v_F \tau$, átlagos szabad úthossz, az az úthossz, mely után a kezdeti momentum változik.

$\gg L_\varphi$: fázis relaxációs hossz (phase relaxation length)

az a távolság, amit az elektron befut mielőtt a kezdeti fázise "elromlik". anyagtól, T-től függ, B-től is.

Szórodás





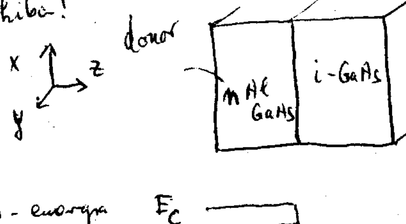
L_φ

Mezoszkópikus félvezető nanoszerkezet

- nagy tisztaságú (kevés szennyező)
- kevés kristályhiba
- vékony réteg (2 dimenziós elektrongáz)
- nagy mozgékonyságú elektronok (kis effektív tömeg, $m_{eff} = 0.067$)
- kicsi elektronsűrűség a rétegben $\Rightarrow \lambda_F \sim 40$ nm, nagy! (Fermi hullámhossz)
- ℓ: szabadúthossz nagy 10 μm!

GaAs – AlGaAs heterojunctions

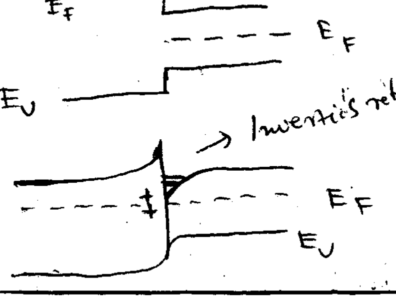
Kétféle atomos a két anyag rácsállandója. N: kristályhiba! (Szórodás)



E_F a széles gappel rendelkező AlGaAs-ban nagyobb, mint a keskenyebb gappú GaAs-ban. $E_F(AlGaAs) > E_F(GaAs)$.

Elektronok mennek át az AlGaAs-ből a GaAs-be és pozitív töltéseket hagynak donorok vissza. Ezek a ⊕ töltések elektromos potenciált eredményeznek. A sáv hajlik. A rétegnél egy potenciál gödör lesz. Ebben általában a legalsó nivón ülnek az elektronok.

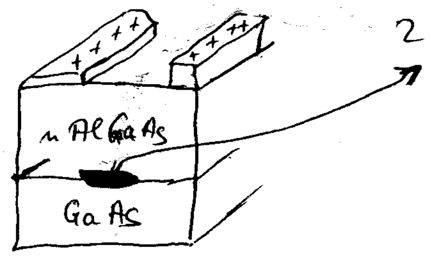
A Fermi-energia különböző. A két réteg összeillesztése után az E_F azonos lesz egyensúly esetén. Elektron mozgás.



Inverziós réteg

Az elektronok a rétegre ⊥ irányba (z-irány) való mozgáshoz nagy energia szükséges, így az elektronok (?) a két anyag határán tartózkodnak ⟶ 2 DEG (két dim. elektrongáz)

A 2 DEG tovább "terelhető" a réteg fölé helyezett ⊕ gate-kel. Stadion, kör, stb. alakú tartományba szorítható az elektrongáz.



Technológia + Fizika ⟹ gyors fejlődés ezen a téren. (1970-80 évektől)
(ritka egybeesés)
↓
Nagy célok, tervek elképzelések : $\boxed{?}$ Kvantum számítógép $\boxed{?}$

Fáziskoherens kvantum eszközök szerkezete.

<u>Tipikus paraméterek</u> GaAs (100)

Effektív tömeg : $m_{eff} = 0.067 \cdot m_e$, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-28}$ g

T < 10K

Állapotsűrűség : $\rho_{2D} = \frac{m}{2\pi\hbar^2} = 0.28 \cdot 10^{11} \frac{1}{cm^2\, meV}$

Elektronsűrűség a rétegben $n_s = 4 \cdot 10^{11} \frac{1}{cm^2}$

Fermi-hullámszám $k_F = \sqrt{2\pi n_s} = 1.58 \cdot 10^{6} \frac{1}{cm}$

Fermi-energia $E_F = 14$ meV !!! $(v_F = 2.7 \cdot 10^{7} \frac{cm}{sec})$

Fermi-hullámhossz $\lambda_F = \frac{2\pi}{k_F} = 40$ nm !!! $= 400\,\mathring{A}$

Átlagos szabadúthossz $l = v_F \tau = 10^2 - 10^4$ nm , $l >> \lambda_F$

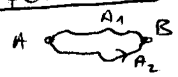
Fáziskoherencia hossz $L_\varphi \gtrsim 200$ nm !!! $= 2000\,\mathring{A}$

Megj.: <u>Normál fémeknél</u> $\lambda_F \sim 1\,\mathring{A} \Leftarrow E_F \sim 1\,eV$

→ sávszerkezet + pályák (klasszikus)

Nanométeres tartományban a (félig) klasszikus diffúziós transzport nem jó. Új jelenségek, a kvantumos jelleg fontos.

Hát ez eddig is figyelembe volt véve (semiklasszikus transzport), de most az elektronok interferenciája is fontos lett.

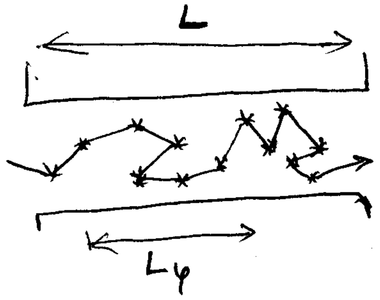


$|A_1+A_2|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + A_1^*A_2 + A_1A_2^*$

Transzport tartományok:

- Diffúziós tartomány:

rendezetlen helyeken a szennyezőn rugalmasan szóródik az elektron



$w > l$

$\boxed{l < w, L}$

L_φ

L_φ-t nem változtatja. csak l-t.

„Ohmikus" anyagnál az egyes szegmensek vezetőképessége csak akkor adódik össze, ha a szegmensek hossza $\gg L_\varphi$.

Alacsony hőmérsékleten (1K) L_φ elég nagy lehet, összemérhető a minta méretével (L). ⇒ Fáziskoherencia a minta nagy részén.

Ezek kvantumos koherencia miatt új effektusok lépnek fel:

- gyenge lokalizáció
- vezetőképesség fluktuációk
- Aharanov-Bohm effektus

- Ballisztikus tartomány:

$\boxed{W, L < l}$

Nincs szórás ↓ Nem várunk ellenállást!

Nem zérus ellenállás oka: a kontaktus (a nagy külső 2DEG és a keskeny 2DEG minta között.)

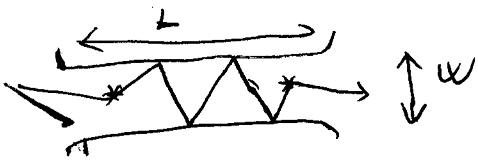
Analógia: elektron optika, határon van csak szórás.
Sch. egyenlet ⇒ $(\Delta + k^2)\Psi = 0$ alakú, mint a waveguide-ban.

Landauer-formula jól használható. ← kevés számú haladó módus van a „waveguide"-ban.

G számít nem σ!

Kvázi ballisztikus tartomány:

$\boxed{w < l < L}$



kevés szennyező.

A határon + a szennyezőn szóródik az elektron és egyenlő fontosságú mindkettő.

2DEG Schrödinger egyenlete

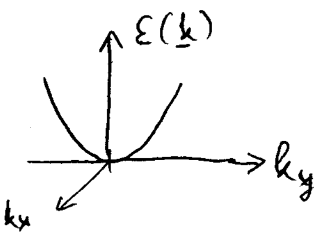
$$\hat{H}\psi = \varepsilon\psi \quad , \quad \hat{H} = \frac{(p + e\underline{A})^2}{2m} + U(\underline{r})$$

$\to$ confining potential

$\swarrow$ effektív tömeg, $m = 0.067\, m_e$

Szabad gáz, $U(\underline{r}) = 0$

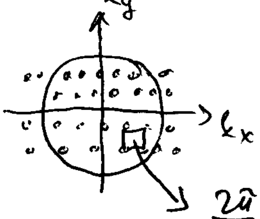
$$\Rightarrow \psi(\underline{r}) = e^{i\underline{k}\underline{r}} \quad \to \quad E(\underline{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \Rightarrow \text{ konstans energia "felület"} \quad \frac{2mE}{\hbar^2} = k_x^2 + k_y^2$$



periodikus hat. felt.

$\Downarrow$

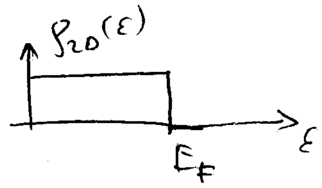
$\underline{k} \in BZ$



$$\frac{2\pi}{L_x}\frac{2\pi}{L_y} = \frac{2\pi \cdot 2\pi}{L_x L_y}$$

$$N(\varepsilon) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{spin}}}{2} \cdot \frac{2m\varepsilon}{\hbar^2} \cdot \pi \cdot \frac{1}{\frac{2\pi}{L_x}\frac{2\pi}{L_y}} = L_x L_y \cdot 2\,\frac{2m\varepsilon\,\pi}{\hbar^2\, 4\pi^2} = L_x L_y \frac{m\varepsilon}{\hbar^2 \pi}$$

$$\boxed{\rho_{2D}(\varepsilon)} = \frac{1}{L_x L_y} \cdot \frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \boxed{\frac{m}{\pi\hbar^2} = \text{áll.}}$$



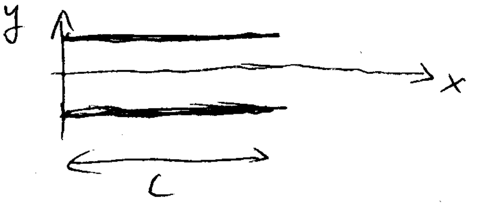
elektronsűrűség

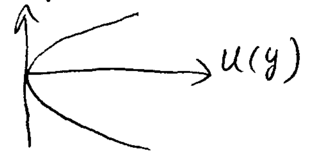
$\downarrow$

$$n_s = \rho_{2D} \cdot E_F = \rho_{2D} \cdot \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \quad \to \quad k_F = \sqrt{2\pi n_s}$$

$$\downarrow \quad v_F = \frac{\hbar k_F}{m}$$

Keresztirányban korlátozott 2DEG + $\underline{B}$-tér:





Landau mérték

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} -By \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{rot}\,\underline{A} = \underline{B}$$

$$\hat{H} = \frac{(\underline{p} + q\underline{A})^2}{2m} + U(y)$$

$q = -e = -1.6 \cdot 10^{-19}\,\text{Cb}$

$$= \frac{(p_x + eBy)^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + U(y)$$

$0 = [\hat{p}_x, \hat{H}] \Rightarrow$ p_x sajátvektora ok., azaz $e^{ikx} \Rightarrow \hat{p}_x = \hbar k$

A megoldás alakja

$$\psi(x,y) = e^{ikx}\chi(y)$$

$$H\psi = \left[\frac{(\hbar k + eBy)^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + U(y)\right]\chi_{n,k}(y) = \varepsilon_n(k)\,\chi_{nk}(y)$$

Spec. esetek: (a) $\boxed{U \neq 0\ ,\ B = 0}$ $\boxed{U(y) = \frac{1}{2} m\omega^2 y^2}$

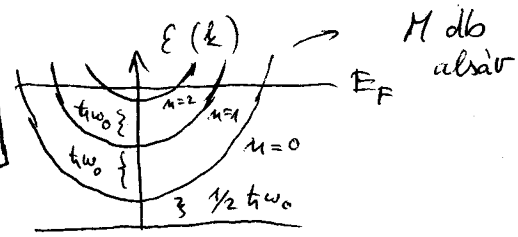
$$\left[\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \underbrace{\frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 y^2}_{\text{osszcillátor}}\right]\chi_{nk}(y) = E_n(k)\,\chi_{nk}(y)$$

$$\boxed{\chi_{n,k}(y) = e^{-\frac{m\omega_0}{\hbar}y^2}\cdot H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\,y\right)}$$

Hermite polinomok

$$H_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}}\ ,\quad H_1(x) = \frac{\sqrt{2}\,x}{\pi^{1/4}}\ ,\quad H_2(x) = \frac{2x^2-1}{\sqrt{2}\,\pi^{1/4}}\ ,\ \dots$$

$$\boxed{E_n(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0}\ \boxed{n = 0, 1, 2, \dots}$$

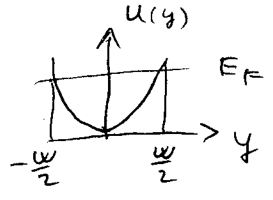


csoport sebesség: $v_n(k) = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial \varepsilon(k)}{\partial k} = \frac{\hbar k}{m}$.

Megj: Hasonló a z irányú inverziós rétegben is a potenciál, de a korlátozott tartomány kicsi (~5–10 nm) $\Rightarrow$ $\hbar\omega_0 \sim 100$ meV $\Rightarrow$ csak egy, esetleg két nívó van betöltve az inverziós potenciálban.

Az $U(y)$ korlátozó potenciál (confining pot.) már nem olyan szűk tartományra "tereli" az elektront, mint z irányban. Így itt több alsávon is lehet elektron. Alsáv $\Leftrightarrow$ kereszt módus.

Jelölés: $\frac{1}{2} m\omega_0^2 \left(\frac{W_F}{2}\right)^2 = E_F$

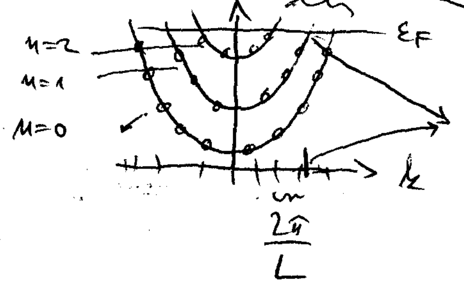


Így W_F valami effektív szélesség

Mennyi a kereszt módusok száma E_F-ig? $M(E_F) = ?$

Legyen az utolsó alsáv indexe n_{max} ekkor $E_F \geq \hbar\omega_0(n_{max} + \frac{1}{2})$ $\Rightarrow$

egész $n_{max} \leq \frac{E_F}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$, de $M(E_F) = n_{max} + 1$ $\Rightarrow$ $M(E_F) = \mathrm{Int}\left[\frac{E_F}{\hbar\omega_0} + \frac{1}{2}\right]$



M db alsáv, keresztmódus

$k_{n,max}$

$$N(\varepsilon_F) = \overset{\text{spin}}{2} \sum_{n=0}^{M-1} \frac{\overset{\text{szimmetrikus}}{2} \cdot k_{n,max}}{2\pi/L}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{N(\varepsilon_F)}{L} = \frac{2}{W_{par}} \sum_{n=0}^{M(\varepsilon_F)-1} \sqrt{\left(\frac{k_F W_{par}}{\pi}\right)^2 - \frac{4}{\pi} \frac{k_F W_{par}}{\pi} \left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\varrho_{parabola}(\varepsilon) = \frac{d N(\varepsilon)}{d \varepsilon}$$

(b.) $U=0$, $\underline{B} \neq 0$ eset, Landau nívók

Sch. egy.
$$\left[\frac{p_y^2}{2m} + \frac{(\hbar k + eBy)^2}{2m}\right] \chi_n(y) = \varepsilon_n(k)\, \chi_n(y)$$

$[p_x, \hat{H}] = 0$

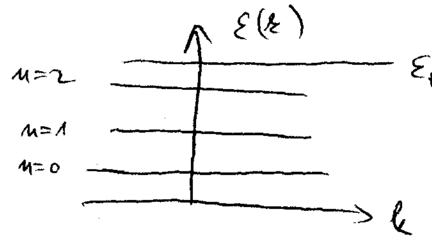
$y_k = \frac{\hbar k}{eB}$ és $\omega_c = \frac{|e| B}{m}$ új változóval a Sch. átírható:

$$\left[\frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_c^2 (y+y_k)^2\right] \chi_n(y) = \varepsilon_n(k)\, \chi_n(y)$$

Ez osszcillátor, csak a parabola az $y=-y_k$ helyre szimmetrikus

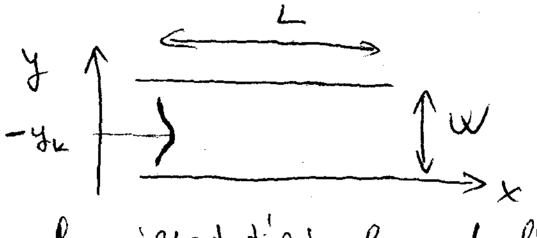
$$\chi_{n,k}(y) = e^{-\frac{m\omega_c}{\hbar}(y+y_k)^2} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_c}{\hbar}}(y+y_k)\right)$$

$$\mathbf{E}_n(k) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c \quad, n = 0, 1, 2, \ldots$$



A csoport sebesség
$$v_n(k) = \frac{1}{\hbar} \cdot \frac{\partial \varepsilon_n(k)}{\partial k} = 0$$
Körpályán mozog az elektron, nincs haladás („drift").

A $\psi(x,y)$ hullámfv. $\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}}$ kiterjedésű az y irányban.



$\underline{k}$ változtatásával a hullámfv. eltolódik az y irányban.

Landau nívó **Degeneráció, N_0: Hány állapot van egy Landau nivón?**

X irányban periodikus hat. feltét. (L hossz) $\Rightarrow$

$$\Delta k = \frac{2\pi}{L} = \text{a lehetséges } k \text{ értékek közti távolság.}$$
(homogénes)

$$\Downarrow$$

$$\Delta y_k = \frac{\hbar \Delta k}{|e| B} = \frac{2\pi \hbar}{|e| BL}$$

Az állapotok ~~degenerációja~~ degenerációja $N_0 = \overset{\text{spin}}{2} \cdot \dfrac{W}{\Delta y_k} = \dfrac{|e| B \cdot (L \cdot W)}{\pi \hbar} =$

$$\Rightarrow \quad N_0 = 2 \cdot \frac{\phi}{\phi_0}$$

ahol ϕ a mintán áthaladó fluxus $\phi = B \cdot LW$
ϕ_0 a ~~flux~~ kvantum $\phi_0 = h/e$

$$\rho(\varepsilon) = N_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \delta\left(\varepsilon - (n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega_c\right)$$

(C) $u \neq 0$, $\underline{B} \neq 0$

Sch. $\left[\dfrac{p_y^2}{2m} + \dfrac{(\hbar k + eBy)^2}{2m} + \dfrac{1}{2} m \omega_0^2 y^2\right] \chi_n(y) = \varepsilon_n(k)\, \chi_n(y)$

Ez átírható (teljes négyzetté alakítással),

$$\left[\frac{p_y^2}{2m} + \overset{\to\ \text{energiaeltolás}}{\frac{1}{2} m \frac{\omega_0^2 \omega_c^2}{\Omega^2} y_k^2} + \overset{\to\ \text{oszcillátor}}{\frac{1}{2} m \Omega^2 \left(y + \frac{\omega_c^2}{\Omega^2} y_k\right)^2}\right] \chi_n(y) = \varepsilon_n(k)\, \chi_n(y)$$

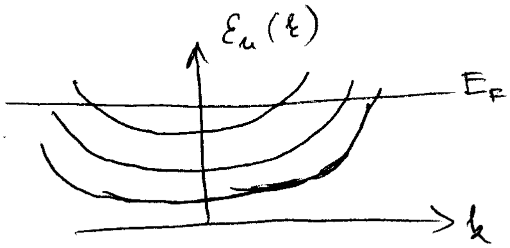
ahol $\Omega^2 = \omega_c^2 + \omega_0^2$, $y_k = \dfrac{\hbar k}{eB}$

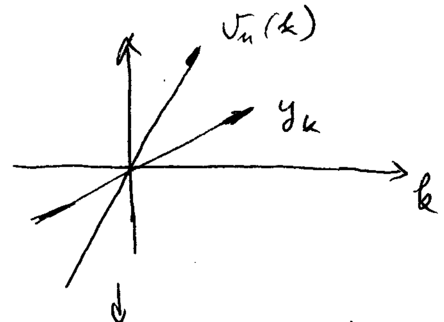
$$\chi_{n,k}(y) = u_n\left(q + \frac{\omega_c^2}{\Omega^2} q_k\right), \text{ ahol } u_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$$

$$q = \sqrt{\frac{m\Omega}{\hbar}}\, y , \quad q_k = \sqrt{\frac{m\Omega}{\hbar}}\, y_k$$

$$\varepsilon_n(k) = \frac{1}{2} m \frac{\omega_0^2 \omega_c^2}{\Omega^2} y_k^2 + (n+\tfrac{1}{2})\hbar\Omega = \boxed{(n+\tfrac{1}{2})\hbar\Omega + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \cdot \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}}$$

Csop. seb. $v_n(k) = \dfrac{1}{\hbar} \dfrac{\partial \varepsilon_n(k)}{\partial k} = \dfrac{\hbar k}{m} \cdot \dfrac{\omega_0^2}{\Omega^2}$





$$y_k = \frac{\hbar k}{eB} = v_n(k)\,\frac{\Omega^2}{\omega_c\omega_0}$$

Az az állapot, amelyik áramot visz az $+x$ irányban az eltolódik (y_k-t) a minta egyik oldala felé, míg azok az állapotok, melyek ellentétes irányú áramot visznek a minta másik oldala felé tolódnak.
Csökken az átfedés a két állapot között (előre és vissza felé haladó állapotok között) a $\underline{B}$ növelésével. Csökken a visszaszórás vsz. (lásd később.)

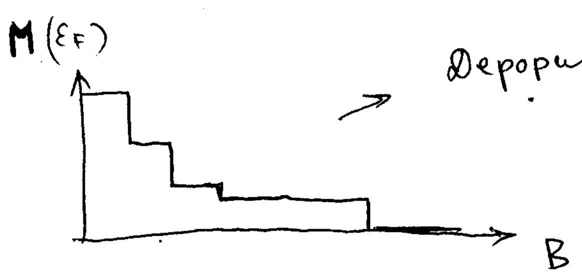
Az előzőekhez hasonlóan kiszámítható az állapotok száma is.

$$\frac{1}{L}N(\varepsilon_F) = \frac{2}{w_{par}}\sum_{n=0}^{M(\varepsilon_F)-1}\sqrt{x^2 - \frac{2}{\pi}\,x\,\sqrt{4+\left(\frac{w_{par}}{l_H}\right)^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)}\,,$$

ahol $x = \frac{k_F w_{par}}{\pi}$, $w_{par} = \frac{2\hbar k_F}{m\omega_0}$ (az előző fejezethez hasonlóan definiáltuk)

$$\sqrt{\frac{\hbar}{eB}} = l_H = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$$ mágneses hossz. $\sim\frac{1}{\sqrt{B}}$

A keresztmódusok száma: $M(E_F) = \mathrm{int}\left[\frac{E_F}{\hbar\Omega}+\frac{1}{2}\right]$



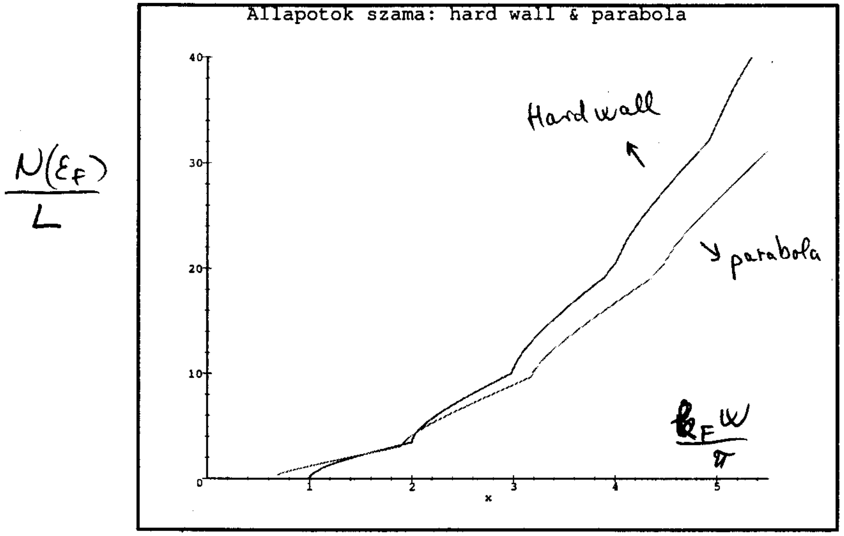
Depopulation: Csökken a keresztmódusok száma a $\underline{B}$ tér növelésével.

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$$

```
> parabola:=x->2*sum(sqrt(x^2-4*x/Pi*(n+0.5)),n =0..trunc(x*Pi/4-0.5));
```

$$parabola := x \to 2\left(\sum_{n=0}^{\mathrm{trunc}(1/4\,x\,\pi-.5)} \sqrt{x^2 - 4\,\frac{x\,(n+.5)}{\pi}}\right)$$

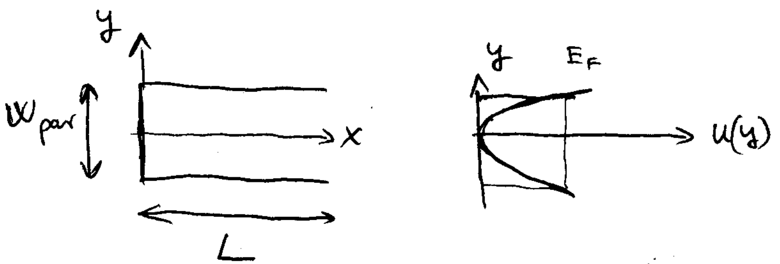
```
> plot([Hard_wall(x),parabola(x)],x=0..5.5,view =[0..6,0..40],title='Allapotok szama:  hard wall &
```



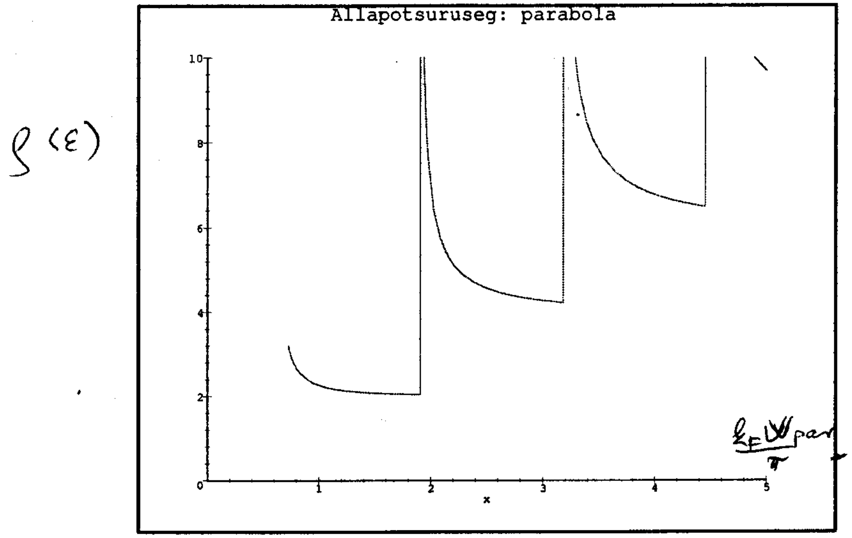

```
> ro_parabola:=x->2*sum((x-2/Pi*(n+0.5))/sqrt(x ^2-4*x/Pi*(n+0.5)),n=0..trunc(x*Pi/4-0.5));
```

$$ro\_parabola := x \to 2\left(\sum_{n=0}^{\mathrm{trunc}(1/4\,x\,\pi-.5)} \frac{x - 2\,\frac{n+.5}{\pi}}{\sqrt{x^2 - 4\,\frac{x\,(n+.5)}{\pi}}}\right)$$

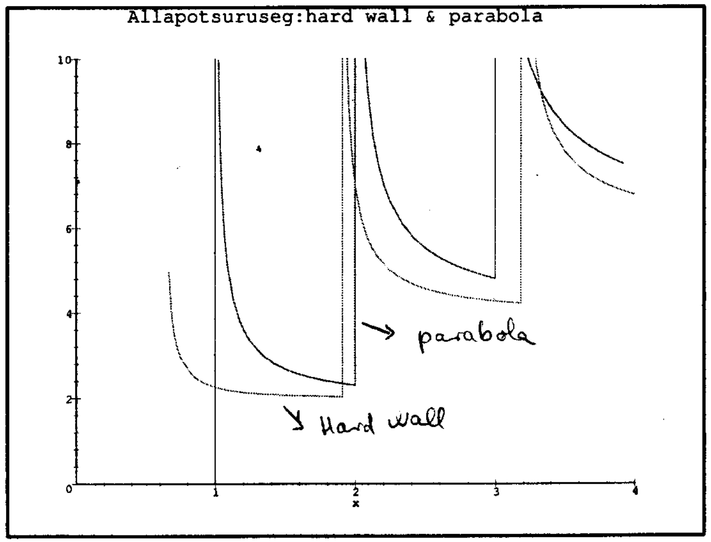
```
> plot(ro_parabola(x),x=0..5,title='Allapotsuru seg:  parabola',view=[0..3,0..10]);
```



$$W_{par} \overset{def}{\Longrightarrow} \frac{1}{2} m\,\omega_0^2\left(\frac{W_{par}}{2}\right)^2 = E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$$




```
> plot([ro_hard(x),ro_parabola(x)],x=0..4,title ='Allapotsuruseg:hard wall & parabola',view=[0..4,0
```




```
> homega_0:=3.9;
```

$$homega\_0 := 3.9$$

$E_F = 17.2\,meV$, $\hbar\omega_0 = 3.9\,meV$

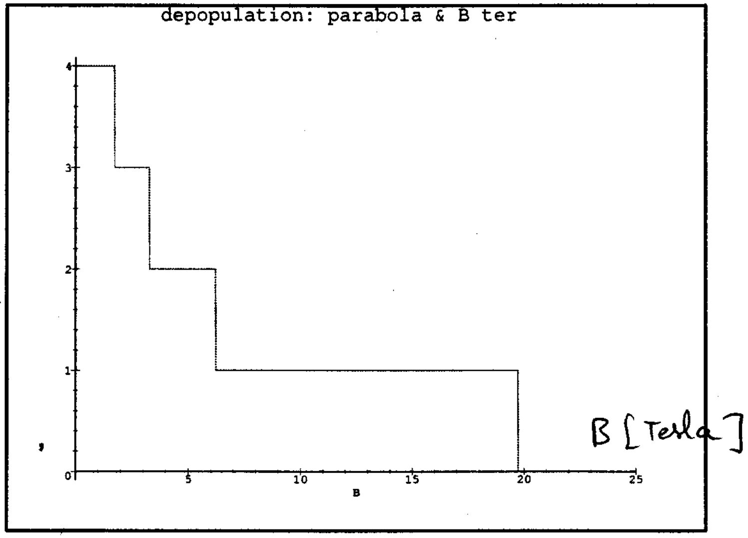
$m = 0.067\, m_e$

```
> M:=(e,B)-> trunc(0.5+e/sqrt(homega_0^2+(1.731*B)^2));
```

$$M := (e, B) \to \mathrm{trunc}(.5 + \frac{e}{\sqrt{homega\_0^2 + 2.996361\, B^2}})$$

```
> plot([M(17.2,B)],B=0..25,title=`depopulation:  parabola & B ter` );
```

$M(E_F, B)$




```
> parabola_Bter:=(e,B)->2/Pi*sum(sqrt(e-(n+0.5) *sqrt(homega_0^2+(1.731*B)^2)),n=0..trunc(e/sqrt(ho
2)-0.5));
```

parabola_Bter :=

$$(e, B) \to 2\,\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\mathrm{trunc}(\frac{e}{\sqrt{homega\_0^2 + 2.996361\, B^2}} - .5)} \sqrt{e - (n + .5)\sqrt{homega\_0^2 + 2.996361\, B^2}}}{\pi}$$

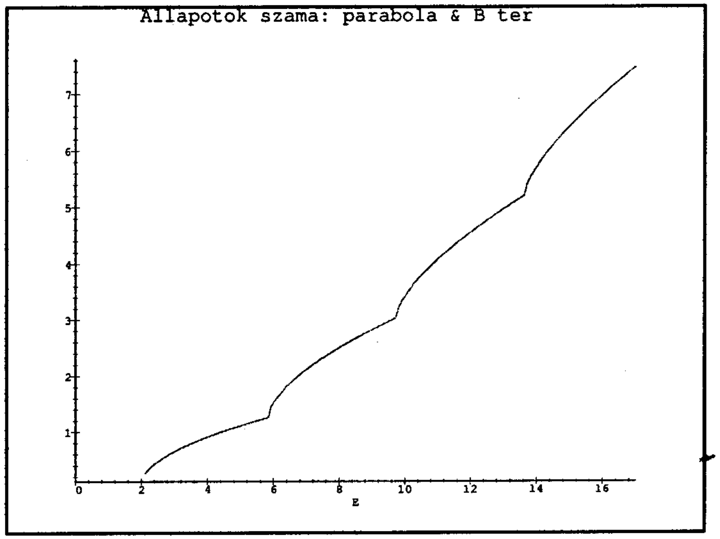
```
> plot(parabola_Bter(E,0.0),E=0..17.,title=`All apotok szama:  parabola & B ter` );
```

effektiv tömeg

$$\hbar\omega_c = \hbar \cdot \frac{eB}{m} = \hbar\, \frac{e\cancel{m}}{m_e} B = \frac{\hbar e}{m_e}\, m \cdot B$$

Megj.: $\hbar\omega_c = 0.116 \cdot B[\mathrm{Tesla}]\ meV$

elektron tömeg értéken




```
> Parabola:=e->2/Pi*sum(sqrt(e-(n+0.5)*homega_0 ),n=0..trunc(e/homega_0-0.5));
```

$$Parabola := e \to 2\,\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\mathrm{trunc}(\frac{e}{homega\_0} - .5)} \sqrt{e - (n + .5)\, homega\_0}}{\pi}$$

```
> hard:=e->2*sum(sqrt(e-Pi^2/16*homega_0^2/e*n^ 2),n=1..trunc(4/Pi*e/homega_0));
```

$$hard := e \to 2 \left(\sum_{n=1}^{\mathrm{trunc}(4\frac{e}{\pi\, homega\_0})} \sqrt{e - \frac{1}{16}\frac{\pi^2\, homega\_0^2\, n^2}{e}} \right)$$

```
> plot([Parabola(E),hard(E)],E=0..17.2);
```


9

Hard Wall

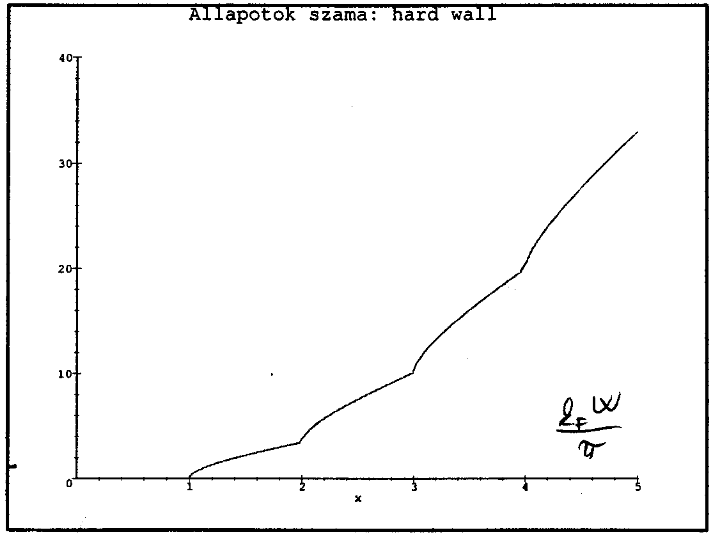
$$H\psi = \left(\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}\right)\psi = \varepsilon\psi$$

```
> Hard_wall:=x->2*sum(sqrt(x*x-n*n),n=1..trunc( x));
```

$$Hard\_wall := x \to 2\left(\sum_{n=1}^{\mathrm{trunc}(x)} \sqrt{x^2-n^2}\right)$$

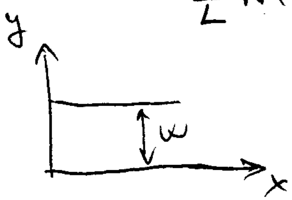
```
> plot(Hard_wall(x),x=0..5,view=[0..6,0..40],ti tle='Allapotok szama:  hard wall' );
```

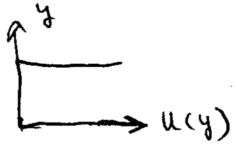
$$\frac{N(\varepsilon_F)}{L}$$



$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$$

$$\frac{1}{L} N(E_F) = \frac{2}{W} \cdot \sum_{n=1}^{M(\varepsilon_F)} \sqrt{\left(\frac{k_F W}{\pi}\right)^2 - n^2}$$





$$\varepsilon_n(k) = E_n + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad \psi(x,y) = \sin\frac{n\pi y}{W}\, e^{ikx}$$

ahol $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mW^2} = E_1 n^2, \quad E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mW^2}$

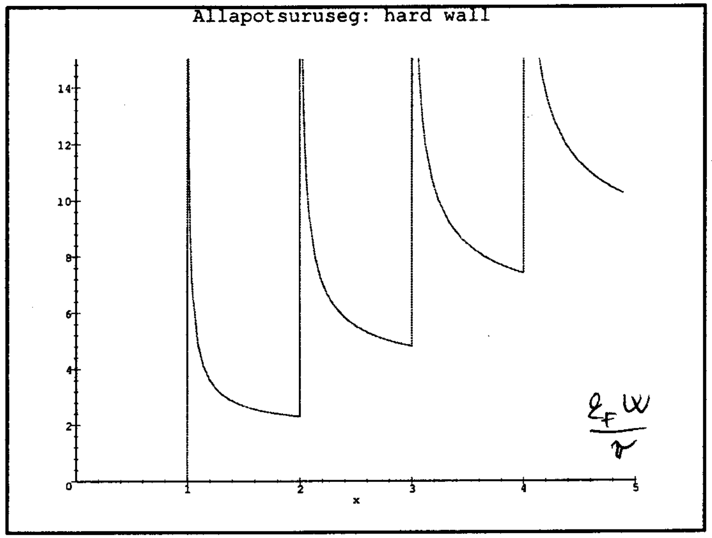
keresztmódusok száma $\longrightarrow$

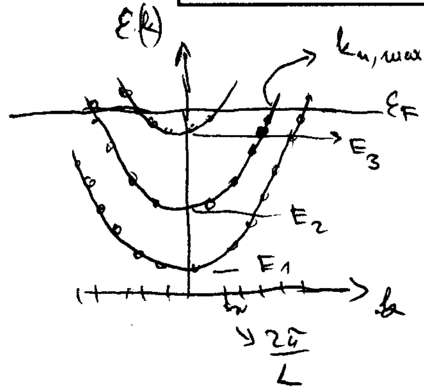
```
> ro_hard(x):=2*sum(x/sqrt(x*x-n*n),n=1..trunc( x));
```

$$\mathrm{ro\_hard}(x) := 2\left(\sum_{n=1}^{\mathrm{trunc}(x)} \frac{x}{\sqrt{x^2-n^2}}\right)$$

```
> plot(ro_hard(x),x=0..5,title='Allapotsuruseg:  hard wall',view=[0..4.2,0..15]);
```

$$\rho(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon}$$





$$N(\varepsilon_F) = \overset{\text{spin}}{2} \sum_{n=1}^{n_{max}} 2 \cdot \frac{k_{n,max}}{2\pi/L} =$$

szimmetrikus k-ban

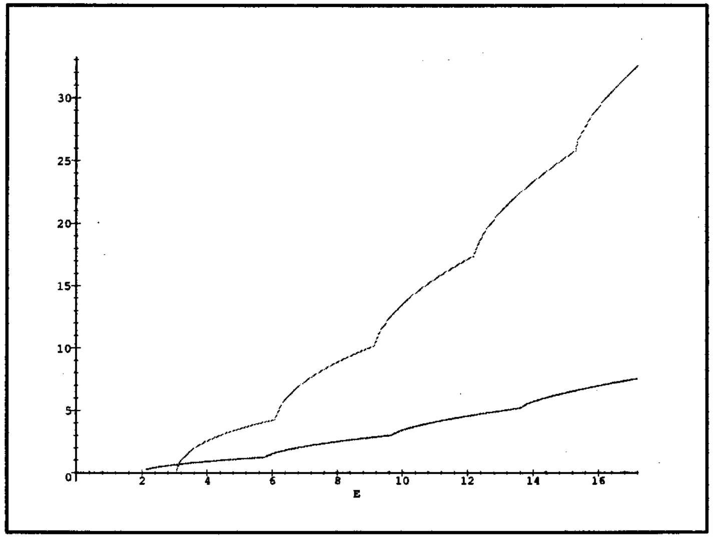
$$= \frac{2}{\pi} L \sum_{n=1}^{M(\varepsilon_F)} \sqrt{(\varepsilon_F - E_1 n^2)\frac{2m}{\hbar^2}} =$$

$$\boxed{\frac{N(\varepsilon_F)}{L} = \frac{2}{W} \sum_{n=1}^{M(\varepsilon_F)} \sqrt{\left(\frac{k_F W}{\pi}\right)^2 - n^2}}$$

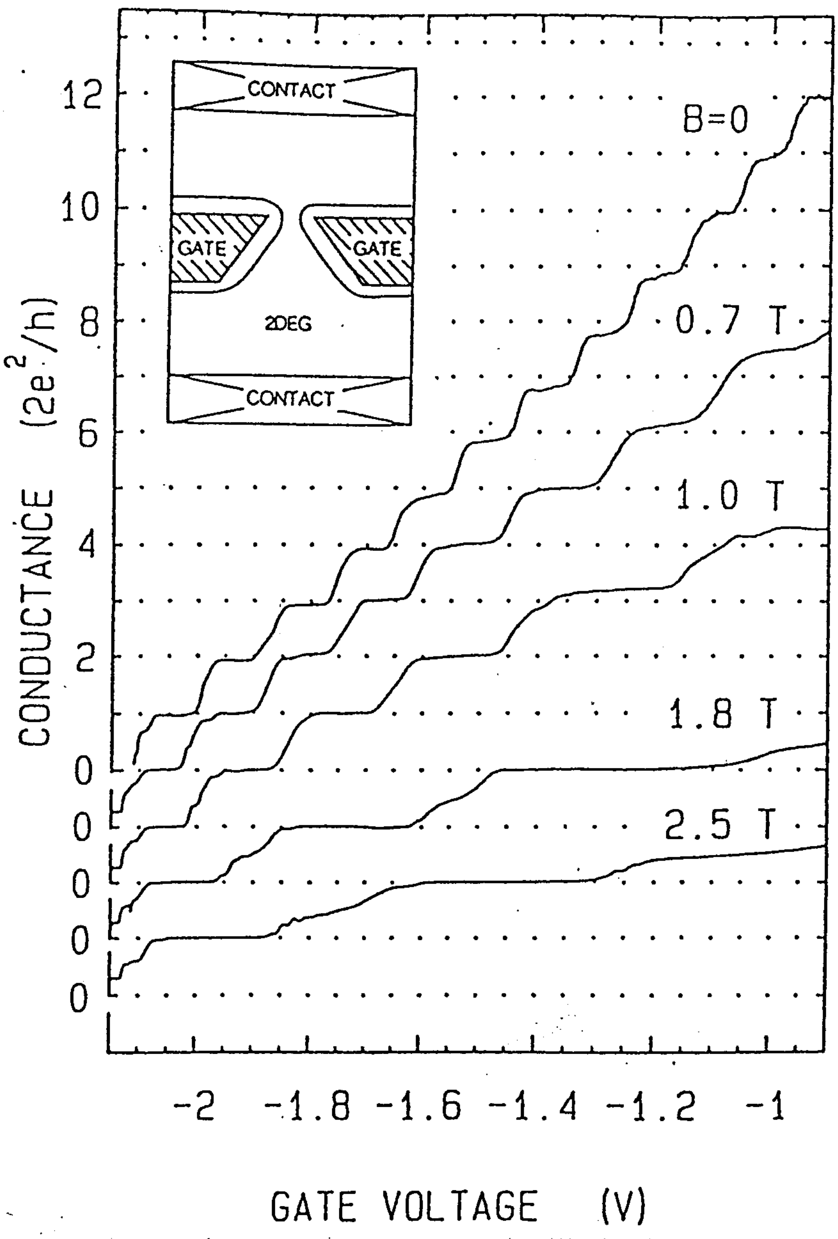
$$\varepsilon_F \geq n_{max} \cdot E_1$$

$$n_{max} = \mathrm{Int}\left[\frac{\varepsilon_F}{E_1}\right]$$

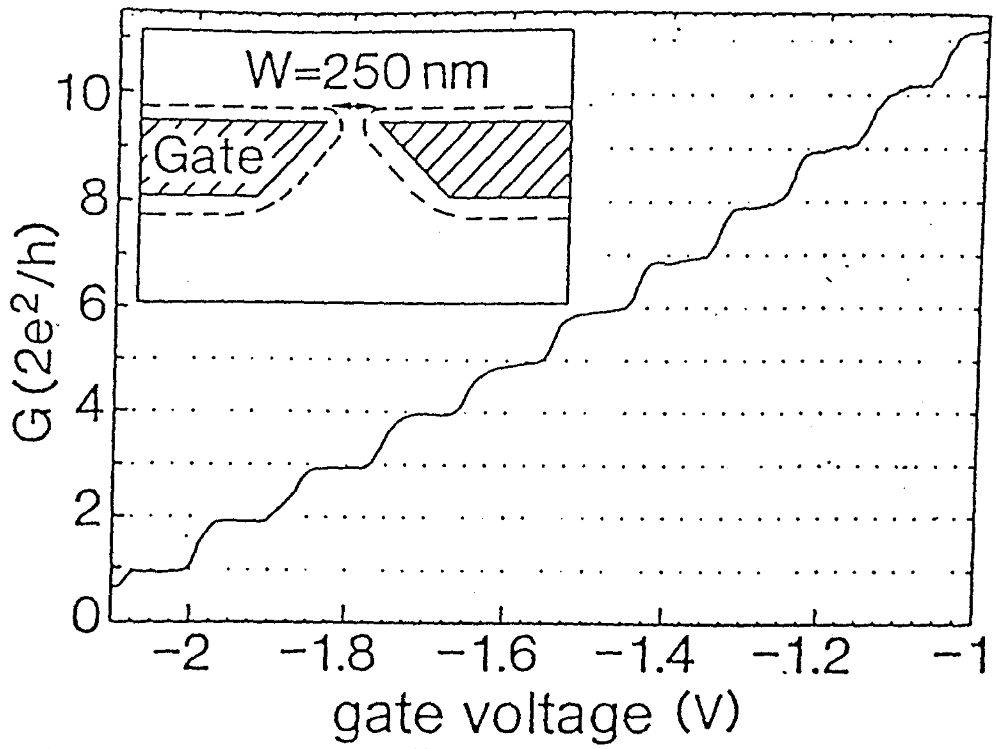
$$M = n_{max} = \mathrm{Int}\left[\frac{\varepsilon_F}{E_1}\right] = \boxed{\left[\frac{k_F W}{\pi}\right]_2}$$



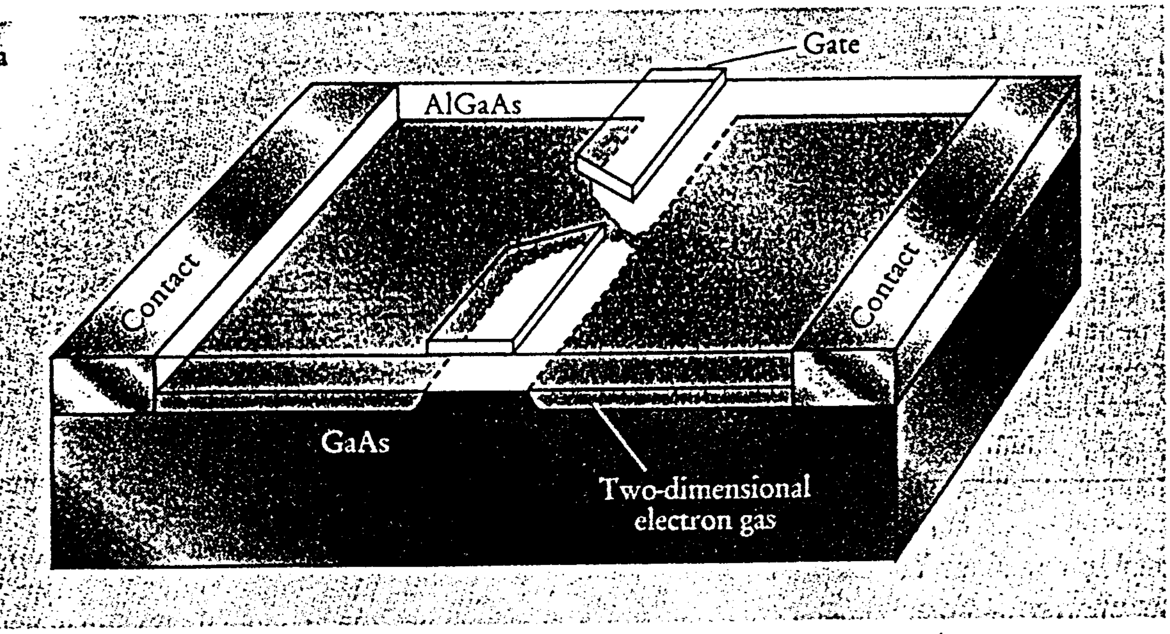
30
25
20
15
10
5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
E



CONTACT
GATE
GATE
2DEG
CONTACT
B=0
0.7 T
1.0 T
1.8 T
2.5 T
12
10
8
6
4
2
0
0
0
0
0
CONDUCTANCE $(2e^2/h)$
-2
-1.8
-1.6
-1.4
-1.2
-1
GATE VOLTAGE (V)

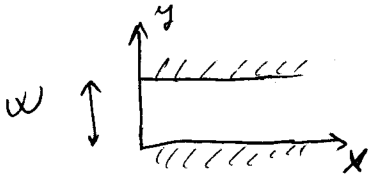

W=250 nm
Gate
G (2e²/h)
0
2
4
6
8
10
−2
−1.8
−1.6
−1.4
−1.2
−1
gate voltage (V)

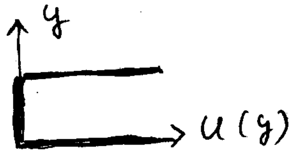
a


Gate
AlGaAs
Contact
Contact
GaAs
Two-dimensional
electron gas

Hard wall:

Legyen $\underline{B} = 0$ és $U(y) = \begin{cases} 0, & 0<y<a \\ \infty, & y=0 \text{ és } y=a \end{cases}$

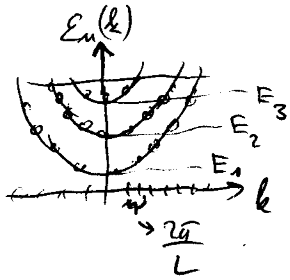




$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} \Rightarrow H\Psi = \varepsilon\Psi \Rightarrow \psi(x,y) = \sin\frac{n\pi y}{W} e^{ikx}$$

$$\varepsilon_n(k) = E_n + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \text{ ahol}$$

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mW^2} = E_1 n^2, \quad E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mW^2}$$



A keresztmódusok száma:

$$\boxed{M = n_{max} = \mathrm{Int}\left[\frac{E_F}{E_1}\right] = \left[\frac{k_F W}{\pi}\right]}, \quad \frac{\sqrt{2mE_F}}{\hbar} = k_F$$

$\varepsilon_F \geq n_{max} \cdot E_1$

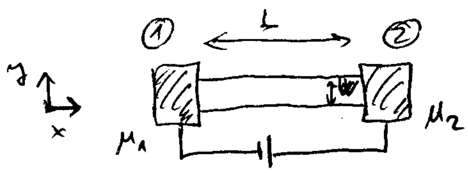
Normal fémekben M nagyon nagy, mert λ_F kicsi és W nagy ($\sim 10^6$!)

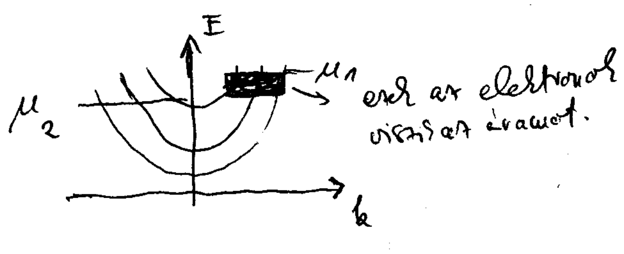
Pl. tértranzisztor, $\lambda_F = 30\,nm$, $W = 15\,\mu m \Rightarrow M \approx 1000$

Vezetőképesség számítása a transzmisszió alapján

Landauer-formula:

A vezetőn átfolyó áramot az elektron transzmissziós valószínűségéből számoljuk. Először vizsgáljuk a ballisztikus vezető ellenállását. Mivel nincs szórócentrum, azt várjuk, hogy zérus az ellenállása. Azonban kiderül, hogy a kontaktusok miatt mégis fellép ellenállás.





Feltevés: Reflectionless contact:
A kontaktusról az elektron nem verődik vissza. Mindent elnyel. Csak emittál.
Ezt a feltevést Szafer, Stone ... PRL, 62, 300('89) numerikusan vizsgálta.

Reflectionless kontaktus esetén a $|+k\rangle$ elektron állapotok (azok, melyek a +x irányban mozognak k hullámszámmal) csak a <u>bal</u> oldali kontaktusból származhatnak, ezért ők a μ_1 kémiai potenciálú ①-es kontaktussal vannak egyensúlyban.

A $|+k\rangle$ állapot kvázi Fermi-energiája μ_1

Hasonlóan a $|-k\rangle$ állapotok <u>csak</u> a jobboldali kontaktusból jöhetnek. $|-k\rangle$ állapot kvázi Fermi-energiája μ_2

T=0 hőmérsékleten: <u>Áram számolása</u>: $\forall$-n módusnak van egy $\varepsilon_n(k)$ diszperziós relációja, és egy E_n cut-off energiája, mely alatt az elektron nem propagálódhat. $E_n = \varepsilon_n(k=0)$

A keresztmódusok száma:

$$M(E) = \sum_n \Theta(E - E_n)$$

Tekintsünk egy módust az összes lehetséges $|+k\rangle$ állapottal és $f^+(\varepsilon_n)$ betöltési valószínűséggel.

az n-dik módusra

$$I_n^+ = e n v = e \cdot \frac{1}{L} \sum_k \frac{1}{\hbar} \cdot \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial k} \cdot f^+(\varepsilon_n) =$$

sűrűség

$n = \frac{1}{L}$ (L hosszon egy elektron halad)

$$\sum_k \Rightarrow 2 \cdot \frac{L}{2\pi} \int dk$$

spin

periodikus hat. felt.

$$I_n^+ = \frac{e}{L} \cdot 2 \cdot \frac{L}{2\pi} \frac{1}{\hbar} \int_{E_n}^{\infty} dk \cdot \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial k} f^+(\varepsilon_n) = \frac{2e}{h} \int_{E_n}^{\infty} d\varepsilon_n \cdot f^+(\varepsilon_n)$$

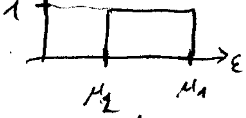
Figyelembe véve az összes módust, adott E energián és összeadva ~~egyes~~ az áramjárulékokat az egyes módusokból:

$$I^+ = \sum_n I_n^+ = \sum_n \frac{2e}{h} \int_{E_n}^{\infty} d\varepsilon\, f^+(\varepsilon) = \frac{2e}{h} \int_{-\infty}^{\infty} M(\varepsilon) f^+(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

kihasználva M(ε) alakját

T=0 K-en

$f^+(\varepsilon)$



Tfh. $M(\varepsilon)$ = áll, ha $\mu_1 < \varepsilon < \mu_2$

$$\Rightarrow I^+ = \frac{2e}{h} M(\varepsilon) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f^+(\varepsilon)\, d\varepsilon}_{\mu_1 - \mu_2} = \frac{2e}{h} M(\varepsilon) \cdot (\mu_1 - \mu_2)$$

csak a $\mu_1 - \mu_2$ energia tartományban levő $|+k\rangle$ állapotok vezetnek.

az alkalmazott V külső feszültség.

$$I^+ = \frac{2e^2}{h} M(E) \cdot \frac{\mu_1 - \mu_2}{e} = G_c \cdot V$$

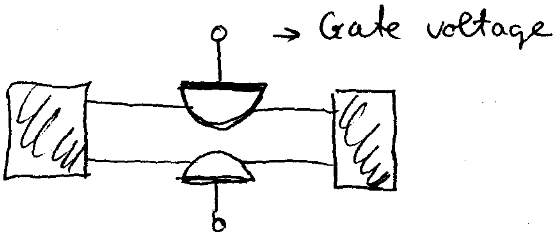
$$\boxed{G_c = \frac{2e^2}{h} M} \rightarrow$$ kontaktus vezetésnek nevezzük.

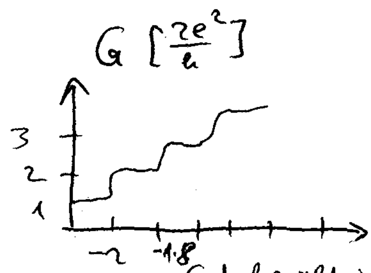
$$R_c = \frac{1}{G_c} = \frac{h}{2e^2}\frac{1}{M} = \frac{12.9\,k\Omega}{M}$$

kontakt ellenállás.

Ha M nagy (makroszkópikus méret, pl. fém), akkor R_c elhanyagolható hiszen M nagy pl. $M \sim 10^6$)

Kísérlet: B.J. Wees: PRL, 60, 848('88)





lépcsők!

$\lambda_F \sim 30nm$, $W \sim 250nm$

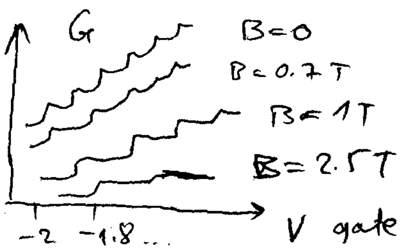
$M \sim \frac{k_F W}{\pi}$ elég kicsi.

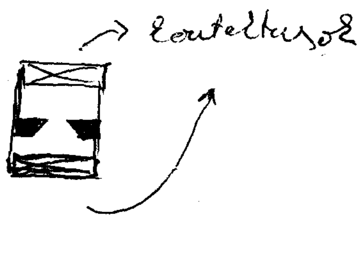
(Fólia)

Kísérlet: Depopulation of subbands; keresztmódusok kiürülése a B tér növelésével.

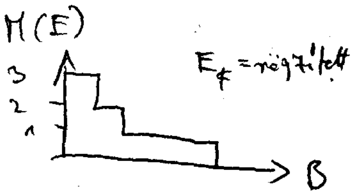
B.J. Wees et al. PRB, 38, 3625('88)

(Fólia)



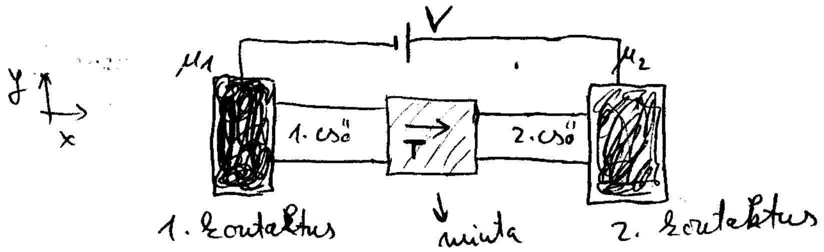


Láttuk korábban

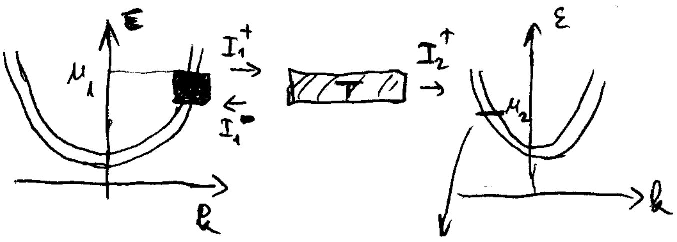


B-t növelve egyre kevesebb lett az $M(B)$ keresztmódusok száma rögzített Fermienergián

Landauer-formula:



Tfh.: a csövek ballisztikusak



$|+k\rangle$ az 1. csőben csak az 1. kontaktusból jöhet (reflectionless contacts miatt) Így a kémiai potenciáljuk μ_1 lesz.

$|-k\rangle$ állapotok kémiai potenciálja

Hasonlóan a $|-k\rangle$ állapotok a 2. csőben csak a 2. kontaktusból jöhetnek $\Rightarrow$ μ_2

Az 1. csőből a mintába jövő áram:

$$I_1^+ = \frac{2e}{h} M(\mu_1-\mu_2)$$

← alkalmaztuk az előző eredményt ballisztikus csőre. Csak a $\mu_1-\mu_2$ energiasávban lévő elektronok adnak áramot.

A kimenő áram a mintából:

$$I_2^+ = I_1^+ \cdot T = \frac{2e}{h} MT(\mu_1-\mu_2)$$

, ahol T a transzmissziós valószínűség a mintára.

A maradék áram visszaverődik a mintáról és bemegy az 1. kontaktusba.

$$I_1^- = \frac{2e}{h} M(1-T)(\mu_1-\mu_2)$$

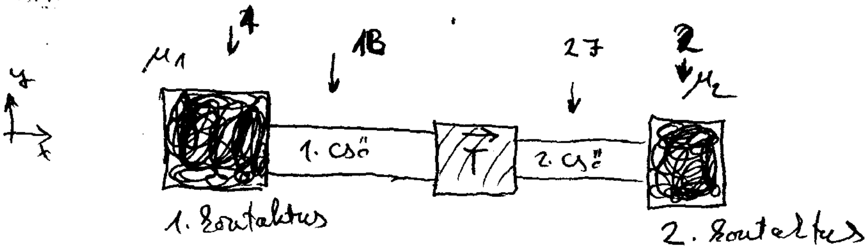
A net áram:

$$I = I_1^+ - I_1^- = I_2^+ = \frac{2e}{h} \cdot M \cdot T \cdot (\mu_1-\mu_2) = \frac{2e^2}{h} M \cdot T \cdot \overbrace{\frac{\mu_1-\mu_2}{e}}^{V}$$

$$\Rightarrow \boxed{G = \frac{2e^2}{h} M \cdot T}$$

Ez a Landauer-formula.

Kérdés: Be kell venni a kontaktusokat is a T számításában?



Állítás: Elég M·T mennyiséget 1B és 2J között számolni. (Ez egy csomó számolási munkától ment meg!)

Biz.: A Landauer-formulánál csak a mintába bejövő elektronokat néztük. Belátható, hogy "reflectionless" kontaktusok esetén az egyes csövekben a mintába bejövő állapotok termikus egyensúlyban vannak a megfelelő kontaktussal, így elég számolni M·T-t 1B és 1J között. Mindez a következő módon látható be: Az elektron, mely a 2. kontaktusból jön soha sem tölti be $|+k\rangle$ állapotot az 1. csőben, hiszen ez az elektron a $|-k\rangle$ állapotot tölti be az 1. csőben, majd elnyelődik az 1. kontaktusnál. Ezért a $|+k\rangle$ állapot az 1. csőben csak az 1. kontaktusból jöhet. Így a kvázi Fermi-energiája (F^+) a $|+k\rangle$ állapotoknak az 1. csőben mindig (még ha külső potenciált is adunk a rendszerre) μ_1. Hasonlóan a $|-k\rangle$ állapot a 2. csőben csak a 2. kontaktusból származhat, ezért a $|-k\rangle$ állapotok kvázi Fermi-energiája μ_2.

Megj.: A mintából kimenő elektronokra a fentiek nem igazak.
Pl.: a $|-k\rangle$ állapot az 1. csőben részben jöhet a 2. kontaktusból a mintán való áthaladás során, másrészt az 1. kontaktusból a mintán való reflexió után. Így a $|+k\rangle$ állapotok energia eloszlását az 1. csőben nem lehet tudni. Hasonló igaz a $|+k\rangle$-ra a 2. csőben. De szerencsére a Landauer-formula levezetéséhez nem kell tudni ezeknek az állapotoknak a energia-eloszlását (kémiai potenciálját). Csak a mintába bejövő állapotok energia-eloszlása kell a levezetéshez.

Ohm-törvény: Nagy mintára a Landauer-formulából megkapható az Ohm törvény.

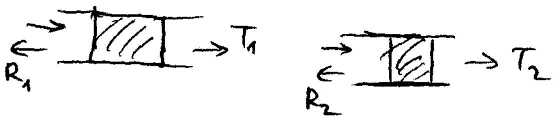
$$M = \frac{k_F W}{\pi} \quad \text{nagy mintára}$$

$$G = \frac{2e^2}{h} M\cdot T = \frac{2e^2}{h}\frac{k_F W}{\pi} T =$$

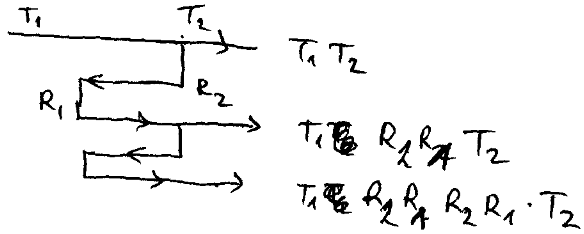
$\leftarrow$ Tudjuk, hogy $\varrho_{2D} = \frac{m}{\hbar^2 \pi}$ 2DEG-re

(*) $$= e^2 \varrho_{2D}\cdot W\left(\frac{v_F}{\pi} T\right)$$ $\rightarrow$ T a transzmissziós vsz.

Kérdés mennyi $T = ?$

Nézzük először két egységet: 

Azt gondolnánk $T = T_1 T_2$ Ez hibás! Figyelembe kell venni a reflexiókat.



$$T_{12} = T_1T_2 + T_1T_2R_1R_2 + T_1T_2R_1^2R_2^2 + \dots = \frac{T_1T_2}{1-R_1R_2}$$

Tudjuk, hogy $R_1 = 1-T_1$ és $R_2 = 1-T_2$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1-T_{12}}{T_{12}} = \frac{1-T_1}{T_1} + \frac{1-T_2}{T_2}}$$

Az $\frac{1-T}{T}$ mennyiség additív!

Legyen N db szórócentrum sorban. $N = \nu L$, ahol ν az egységnyi hosszon a szórócentrumok száma. (L: minta hossza)

$$\frac{1-T(N)}{T(N)} = N\cdot\frac{1-T}{T} \Rightarrow T(N) = \frac{T}{N(1-T)+T} =$$

$$\Rightarrow T(L) = \frac{L_0}{L+L_0} \quad \text{és} \quad L_0 = \frac{T}{\nu(1-T)}$$

Így (*)
$$G = \frac{W}{L+L_0}\underbrace{e^2\varrho_{2D}\cdot\frac{v_F L_0}{\pi}}_{\to D} = \boxed{\frac{\sigma W}{L+L_0}}$$

Szabad úthossz: Mennyi $L_0 = ?$

L_0 az a hossz (átlagosan), melyet az elektron megtesz mielőtt szóródna. $\ell\nu$ db szórócentrum van ℓ hosszon. Egy centrum általi szórás vsz-e $= 1-T$. Így a vsz, hogy szóródik $\ell\nu$ db közül egyikén centrumon $= (1-T)\nu\ell$, de ez ≈ 1, hiszen ℓ szakasz megtétele után már szóródik az elektron.

Einstein reláció: $\sigma = e^2\varrho_{2D}\cdot D$

$\ell^2 \sim \langle x^2\rangle = D\cdot\tau$, "$v_F\tau$" $\ell \Rightarrow D \sim v_F \ell$, $\ell \sim L_0 \Rightarrow D \sim v_F L_0$

?: áram diffúzió
$$J = -eD\cdot \mathrm{grad}\, n = -eD\cdot\frac{\varrho_{2D}\cdot(\mu_2-\mu_1)}{L}\hat{x} = -e^2D\cdot\varrho_{2D}\frac{\mu_2-\mu_1}{|e|\cdot L}\hat{x} = -e^2 D\varrho_{2D}\cdot E \Rightarrow \sigma = e^2\varrho_{2D}\cdot D$$

Így $(1-T)\,\nu \ell \sim 1 \Rightarrow$

$$\ell \sim \frac{1}{\nu(1-T)} = \frac{L_0}{T} \qquad \text{ha } T\sim 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \ell \sim L_0$ Azaz L_0 az átlagos szabad úthossz nagyságrendű.

Az a tény, hogy $\frac{1-T}{T}$ additív jellegű $\Rightarrow$ csak a szórócentrumok járuléka $\to$ „aktuális ellenállás".

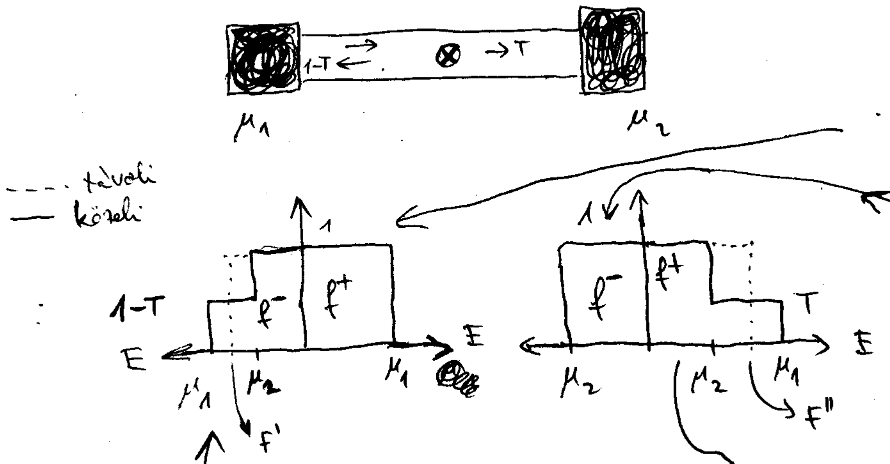
ellenállás: $$G^{-1} = \frac{h}{2e^2M}\frac{1}{T} = \frac{h}{2e^2M} + \frac{h}{2e^2M}\frac{1-T}{T}$$

$\hookrightarrow$ kontakt ellenállás

$$G^{-1} = G_c^{-1} + G_s^{-1}$$

Energiaeloszlás

Elhanyagoljuk most az interferencia effektust és semiklasszikusan vesszük a részecskéket. Később megnézzük az $\underline{S}$ mátrixal is. $T=0\,K$ hőm.



Szórócentrumtól balra a $|+k\rangle$ állapot:

$$f^+(E) = \Theta(\mu_1 - E)$$

a $|+k\rangle$ a baloldalon egyensúlyban van az 1. kontaktussal.

Szórócentrumtól jobbra a $|-k\rangle$ áll.:

$$f^-(E) = \Theta(\mu_2 - E)$$

$|-k\rangle$ állapot kémiai pot. $= \mu_2$

Szórócentrumtól balra $|-k\rangle$ áll.

$\forall$ áll. be van töltve $E \le \mu_2$-ig.

De $\mu_1 - \mu_2$ rangeben $1-T$ valószínűséggel van betöltve a $|-k\rangle$ áll. Ezek az állapotok a 1. kontaktusból származnak.

$$f^-(E) = \Theta(\mu_2 - E) + (1-T)\left[\Theta(\mu_1 - E) - \Theta(\mu_2 - E)\right]$$

Szórócentrumtól jobbra a $|+k\rangle$ áll.

$E \le \mu_2$-ig $\forall$ áll. betöltve. $\mu_2 < E < \mu_1$-re az állapot T valószínűséggel vannak betöltve.

$$f^+(E) = \Theta(\mu_2 - E) + T\left[\Theta(\mu_1 - E) - \Theta(\mu_2 - E)\right]$$

egyensúlyi eloszlás alakul ki.

A szórócentrumtól távol, balra: Beáll valami F' értékre a Fermi-energia

$$f^-(E) \cong \Theta(F'-E)$$

A szórócentrumtól távol, jobbra: F'' lesz a Fermi-energia

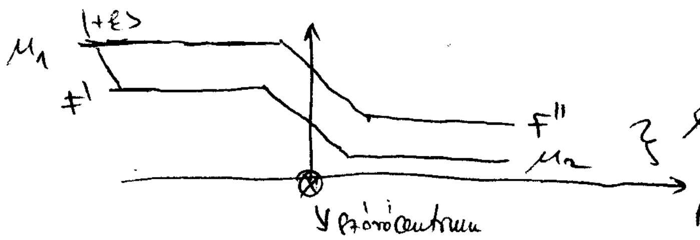
$$f^+(E) \cong \Theta(F''-E)$$

F' és F'' abból határozható meg, hogy a részecskeszám nem változik. (területek azonosak) Így

$$F' = \mu_2 + (1-T)(\mu_1-\mu_2)$$

$$F'' = \mu_2 + T(\mu_1-\mu_2)$$

Kémiai potenciál a hely függvényében:



a két oldalon azonos

különbség $F''-\mu_2 = \mu_1 - F' = T(\mu_1-\mu_2)$

A potenciál esés $\mu_1 - F'' = F' - \mu_2 = (1-T)(\mu_1-\mu_2)$ mind $|+k\rangle$ és $|-k\rangle$-ra.

Ez a pot. esés a szórócentrum körül van, így $= eV_s$ -sel azonosítható.

A $\frac{\mu_1-\mu_2}{|e|}$ feszültségből $(1-T)(\mu_1-\mu_2)$ a szórócentrumon esik, míg a maradék feszültség $\left(= \frac{T(\mu_1-\mu_2)}{|e|}\right)$ a kontaktuson esik.

Ezért az áram:
$$I = \frac{2e^2}{h} M \cdot \frac{T(\mu_1-\mu_2)}{|e|} = G_c V_c$$

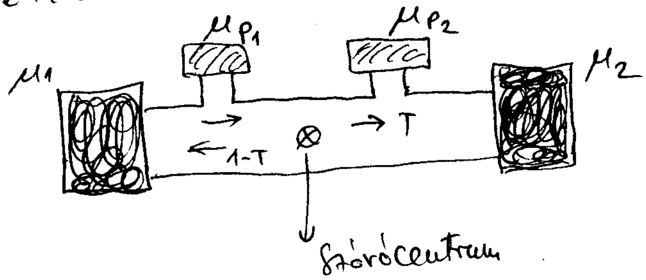
A szórócentrum ellenállása:

$$R_s = \frac{1}{G_s^{-1}} = \frac{V_s}{I} = \frac{\frac{1}{|e|}(1-T)(\mu_1-\mu_2)}{\frac{2e^2}{h} M \frac{T(\mu_1-\mu_2)}{|e|}} = \frac{h}{2e^2 M}\frac{1-T}{T}$$

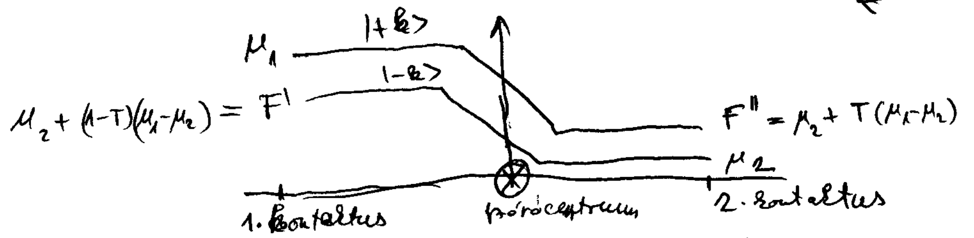
és
$$R_c = \frac{1}{G_c^{-1}} = \frac{V_c}{I} = \frac{h}{2e^2 M}$$

Mit mérünk?

Nézzük a 4 terminálos elrendezést!



← Korábban láttuk a kémiai potenciál helyfüggését.



$\mu_{p_1} \cong \mu_1$ és $\mu_{p_2} = F''$ → $|+k\rangle$ állapotra (hasonlóan $|-k\rangle$-ra)

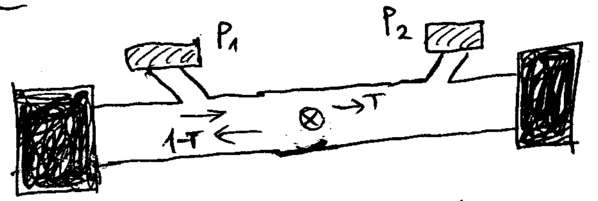
$$\Rightarrow \quad \mu_{p_1}-\mu_{p_2} = \mu_1 - F'' = (1-T)(\mu_1-\mu_2)$$

Az áram $I = \frac{2e}{h} M \cdot T \cdot (\mu_1-\mu_2)$ ← Ezt láttuk már korábban.

$\Rightarrow$ 4-terminál ellenállás $$R_{4t} = \frac{(\mu_{p_1}-\mu_{p_2})/|e|}{I} = \frac{h}{2e^2 M} \cdot \frac{1-T}{T}$$

Az eredmény nagyon függ az elrendezéstől és kvantuminterferenciától.

a) elrendezés: tekintsük az alábbi elrendezést:



A P_2 mérőpontnál a $|+k\rangle$ könnyebben tud belépni, mint a $|-k\rangle$ állapotú elektron (ez utóbbinak nagyobb szögben kell szóródni.) így P_2-nél nagyjából $|+k\rangle$ áll. potenciáljával azonos közvetlenül jobbra a szórócentrumtól. Ezért: $\mu_{P_2} = F''$

$$\mu_{P_2} \approx T\cdot(\mu_1-\mu_2)+\mu_2$$

Hasonlóan a P_1-nél $\mu_{P_1} = F' = (1-T)(\mu_1-\mu_2)+\mu_2$ ← $|+k\rangle$ áll. elektronnak nagy szögben kell szóródni. így $|-k\rangle$-val lesz egyensúly a P_1-nél.

$$\Rightarrow \quad R_{4t} = \frac{(\mu_{P_1}-\mu_{P_2})/|e|}{I} = \frac{h}{2e^2 M}\,\frac{1-2T}{T}$$!!, $T>0.5$-re negatív ellenállás!

A gyakorlatban a vezető minta sokkal hosszabb, mint a szabadúthossz. $T = \frac{L_0}{L+L_0} << 1 \Rightarrow$

$\frac{1-T}{T} \approx \frac{1-2T}{T}$ Így a gyártási eltérések nem okoznak nagy eltérést az ellenállásban. De óvatosnak kell lenni!

b.) Kvantuminterferencia:

Az interferencia befolyásolja a mért feszültséget a mérőpontnál. Pl. az eredmény függ, hogy hol van a szóró centrum ha feltesszük, hogy a szórás koherens a teljes mintában. Később ezt $\underline{\underline{S}}$ mátrix segítségével konkrét példát látunk erre. (Datta, Ex. 3.1.)

Ez egy jelzés arra is, hogy a semiklasszikus leírás korlátozott. Eddig az eloszlás fv. $f^{\pm}(E)$-t néztük a $|+k\rangle$ és $|-k\rangle$ állapotra. Hasonló módon számolnak a p-n tranzisztoroknál is csak ott el. és lyuk van. Azonban fázis koherens mintában a $|+k\rangle$ és $|-k\rangle$ állapotok erősen korrelálhatnak. $\Rightarrow$ Az $f(E)$ Fermi-eloszlás fv. helyett a sűrűség-mátrix leírás a helyesebb. Ez egy másik story...

A továbbiakban a több terminálos fázis koherens mintát a mért áramok és feszültségek alapján jellemezzük. Ezzel megkerüljük azt a kérdést, hogy milyen belső elektronállapotai vannak a vezetőnek. Először Büttiker dolgozta ezt ki.

Büttiker-formula: $I = \frac{2e}{h} M \cdot T \cdot (\mu_1 - \mu_2) = \frac{2e}{h} \overline{T}(\mu_1 - \mu_2)$, $\overline{T} = M \cdot T$

két-terminál eset.

Kiterjesztés több terminálra:

$$I_a = \frac{2e}{h} \sum_b \left(\overline{T}_{a \leftarrow b} \mu_b - \overline{T}_{b \leftarrow a} \mu_a \right) \xRightarrow{V = \mu/e}$$

az árammal ellentétes az el. transzfer irányával.

a nyíl az el. transzfer iránya.

a terminál felé +

$$\Rightarrow \quad I_a = \sum_b \left(G_{ab} V_b - G_{ba} V_a \right), \text{ ahol } G_{ba} = \frac{2e^2}{h} \overline{T}_{b \leftarrow a}$$

$\forall I_q = 0$, ha V_p az összes terminálra azonos.

$$\boxed{\sum_b G_{ab} = \sum_b G_{ba}}$$

összeg szabály. Lásd még Datta 123-old. $\underline{\underline{S}}$ mátrix kapcsolat.

Ezt felhasználva (és az I_p-be az első summából V_p-t kiemelve)

Büttiker-formula

T=0K hőmérsékleten!

$$\boxed{I_a = \sum_b \underbrace{G_{ab}}_{G_{ab}} (V_b - V_a)} \; , \text{ahol } G_{ab} = \frac{2e^2}{h} \overline{T}_{b \leftarrow a}$$

" G_{ba}-ba pakoltuk a kvantummechanikát "

A Büttiker-formula hasonló a Kirchoff-törvényhez, ha a $\underline{B}$ mágneses tér zérus. $\underline{B} \neq 0$ esetén

$$G_{ba}(B) \neq G_{ab}(B)$$

Nem szimmetrikus, ami kell, hogy teljesüljön a Kirchoff törvény.

Igaz az, hogy

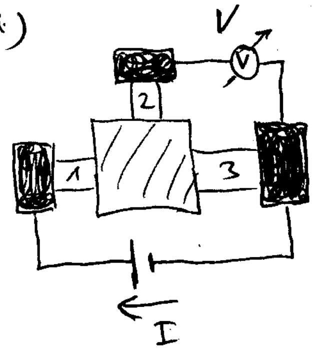
$$G_{ab}(\underline{B}) = G_{ba}(-\underline{B})$$

szimmetrikus $\underline{G}$, ha $\underline{B}$ irányát ellentétesre változtatjuk.

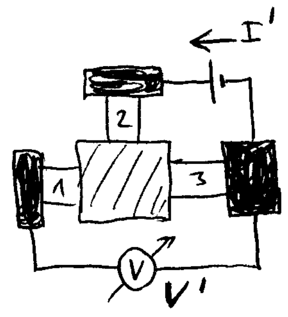
Kísérletileg ez (a lineáris válasz tartományban) mindig teljesült függetlenül a transzport jellegétől, a fizikai részletektől. Az $\underline{S}$ mátrix segítségével be fogjuk látni a fenti összefüggést koherens transzport esetére. (Datta: 123 – 124. oldal!)

Példa: a)

3 terminál:



I, V csere
fordított
elrendezés



$$R_{3t} = \frac{V}{I}$$

Felhasználva a Büttiker-formulát

$$R'_{3t} = \frac{V'}{I'}$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G_{12}+G_{13} & -G_{12} & -G_{13} \\ -G_{21} & G_{21}+G_{23} & -G_{23} \\ -G_{31} & -G_{32} & G_{31}+G_{32} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

És $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ $\Leftarrow$ Az összegszabályból következik.

Az áramok a feszültségkülönbségektől függnek, ezért vehetjük pl. $V_3 = 0$-nak.

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{12}+G_{13} & -G_{12} \\ -G_{21} & G_{21}+G_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Inverz:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}, \quad \text{ahol } \underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} G_{12}+G_{13} & -G_{12} \\ -G_{21} & G_{21}+G_{23} \end{bmatrix}^{-1}$$

$\Rightarrow$ Ha R_{3t}-t akarjuk megtudni, akkor $I_2 = 0$ (hiszen ide egy nagy ellenállású V voltmérő van kapcsolva, melyen egy elhanyagolható áram folyik.

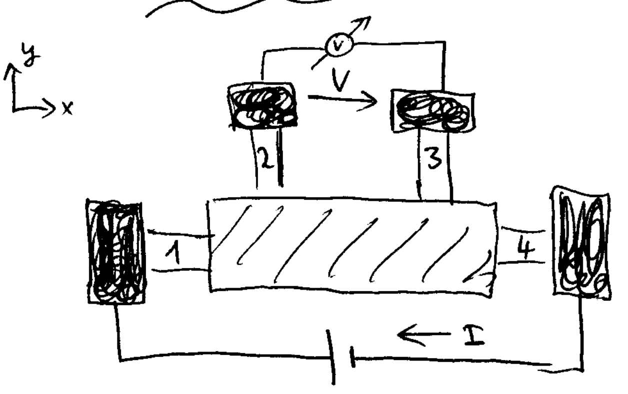
$$\Rightarrow R_{3t} = \frac{V}{I} = \frac{V_2}{I_1}\bigg|_{I_2=0} = R_{21}$$

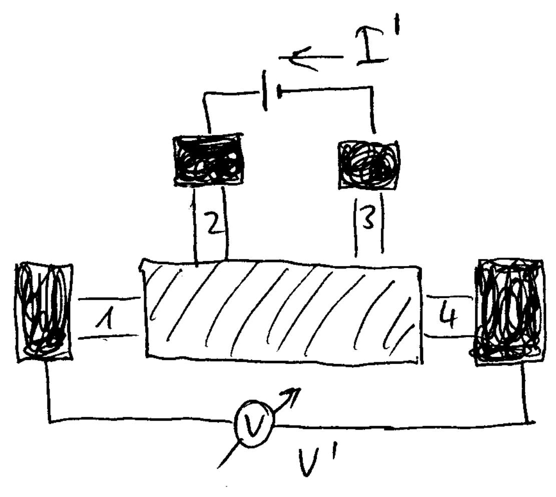
(Note that $V_3 = 0$ vettük!)

Hasonlóan a fordított elrendezésre:

$$R'_{3t} = \frac{V'}{I'} = \frac{V_1}{I_2}\Big|_{I_1=0} = R_{12}$$

b.) 4-terminál:





Legyen $V_4 = 0$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G_{12}+G_{13}+G_{14} & -G_{12} & -G_{13} \\ -G_{21} & G_{21}+G_{23}+G_{24} & -G_{23} \\ -G_{31} & -G_{32} & G_{31}+G_{32}+G_{34} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

$I_2 = I_3 = 0$

Invert:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{R}} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$

és $I_1 + I_4 = 0$

$$R_{4t} = \frac{V}{I} = \frac{V_2 - V_3}{I_1}\Big|_{I_2=I_3=0} = \quad = R_{21} - R_{31}$$

Hasonlóan a fordított elrendezésre: ($V_4 = 0$ vettük!)

$$R'_{4t} = \frac{V'}{I'} = \frac{V_1}{I_2}\Big|_{I_1=0,\, I_2=-I_3} = R_{12} - R_{13}$$

Reciprocitás

Makroszkópikus Hall mérésnél $R_{4t} \Leftrightarrow \rho_{xx}$ és Onsager termodinamika segítségével bebizonyította, hogy

$$\rho_{xx}(B) = \rho_{xx}(-B) \Rightarrow R_{4t}(B) = R_{4t}(-B)$$

Mezoszkópikus rendszerben R_{4t} fluktuál B függvényében, mert a véletlenszerű többszörös szórások amplitudói interferálnak. Később ezt részletesebben vizsgáljuk. Így nem várhatjuk,

$$R_{4t}(B) = R_{4t}(-B) \;!$$

Azonban tetszőleges alakú makroszkópikus vezetőre régóta ismert, hogy $\underline{B} \to -\underline{B}$ és a $I \leftrightarrow V$ csere után a mért ellenállás nem változik.

Az előző példákban

$$R_{3t}(+\underline{B}) = R'_{3t}(-\underline{B}) \quad \text{vagy} \quad R_{4t}(+\underline{B}) = R'_{4t}(-\underline{B})$$

Ez a reciprocitási feltétel. Először termodinamikai úton bizonyították.

<u>Állítás</u>: A reciprocitás igaz mezoszkópikus rendszerre is

R. A. Webb et. al. Physics Today 41, 52 (1988).

Kihasználjuk a reciprocitást a konduktanciára (korábban láttuk de nem bizonyítottuk) később $\underline{S}$-mátrix segítségével bizonyítjuk

$$G_{qp}(\underline{B}) = G_{pq}(-\underline{B})$$

Innen következik ($\underline{\underline{R}} = G^{-1}$): transzponált

$$\underline{\underline{R}}^{-1}\Big|_{\underline{B}} = \widetilde{\underline{\underline{R}}^{-1}}\Big|_{-\underline{B}}$$

Mivel $\widetilde{\underline{\underline{R}}^{-1}} = [\tilde{\underline{\underline{R}}}]^{-1}$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{R}}\Big|_{\underline{B}} = (\underline{\underline{R}}^{-1})^{-1}\Big|_{\underline{B}} = [\widetilde{\underline{\underline{R}}^{-1}}]^{-1}\Big|_{-\underline{B}} = [(\tilde{\underline{\underline{R}}})^{-1}]^{-1}\Big|_{-\underline{B}} = \tilde{\underline{\underline{R}}}\Big|_{-\underline{B}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{R}}(\underline{B}) = \tilde{\underline{\underline{R}}}(-\underline{B})$$

Innen pl. 3 és 4 terminál mérésnél:

$$R_{31}\big|_{\underline{B}} = R_{13}\big|_{-\underline{B}}, \quad R_{21}\big|_{+\underline{B}} = R_{12}\big|_{-\underline{B}}$$

$$\Rightarrow \quad R_{3t}\big|_{\underline{B}} = R_{21}\big|_{\underline{B}} = R_{12}\big|_{-\underline{B}} = R'_{3t}\big|_{-\underline{B}}$$

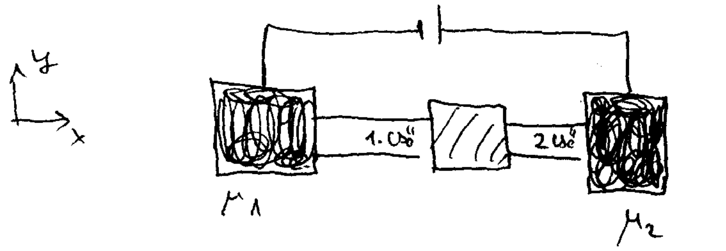
és

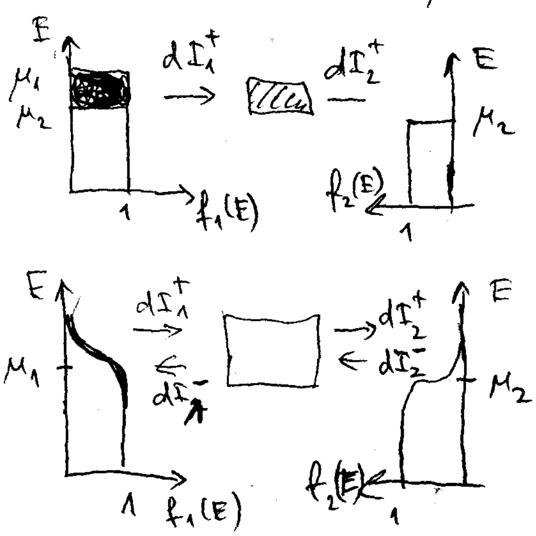
$$R_{4t}\big|_{\underline{B}} = R_{21} - R_{31}\big|_{\underline{B}} = R_{31} - R_{13}\big|_{-\underline{B}} = R'_{4t}\big|_{-\underline{B}}$$

A reciprocitás tulajdonság kísérleti kimutatása volt az egyik fontos alkalmazásával kezdetben a Büttiker-formulának.

További ("valós") alkalmazásra lásd Datta Ex. 2.3, Ex. 2.4.

Nem zérus hőmérséklet, $T \neq 0$





Korábban $T=0K$ esetén a transzport $1 \to 2$-be történt, fordítva nem.

Most $T \neq 0K$ esetén van a mintába bemenő áram a jobb kontaktusból (dI_2^-)

Az 1. kontaktusból a mintába menő áram dE energián belül:

$$dI_1^+ = \frac{2e}{h} M f_1(E)\, dE$$

ahol $f_1(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu_1)}+1}$

$$dI_2^- = \frac{2e}{h} M' f_2(E)\, dE.$$

A 2. csőből kimenő áram: $dI_2^+ = T dI_1^+ + (1-T') dI_2^-$

Az 1. csőből kimenő áram: $dI_1^- = (1-T)\, dI_1^+ + T' dI_2^-$

A net áram:

$$dI = dI_1^+ - dI_1^- = dI_2^+ - dI_2^- = T dI_1^+ + (1-T') dI_2^- - dI_2^- =$$

$$= T dI_1^+ - T' dI_2^- = \frac{2e}{h}\left[M(E)T(E)f_1(E) - M'(E)T'(E)f_2(E)\right] dE$$

jelölés: $\overline{T}(E) = M(E)T(E)$

$$\boxed{I = \frac{2e}{h}\int \overline{T}(E)\cdot\left[f_1(E) - f_2(E)\right] dE}\text{, ha } \boxed{\overline{T}(E) = \overline{T}'(E)}$$

Miért igaz ez?

Egyensúlyban $f_1 = f_2 \Rightarrow I = 0 \Rightarrow$

Általában külső feszültségre $\overline{T}(E) \neq \overline{T}'(E)$. De ha nincs rugalmatlan szórás, akkor ez igaz még $B \neq 0$ esetén is. Lásd később szigorúbb indoklást koherens vezetőkre.

Lineáris válasz:

Ha $\mu_1=\mu_2 \Rightarrow I=0$ ez o.k. ($f_1(E)=f_2(E)$)

Legyen $\mu_1\neq\mu_2$, de $\mu_1-\mu_2$ kicsi.

Ekkor az előbbi képletből: $$\delta I = \frac{2e}{h}\int\Big[\bar{T}(E)\big|_{eq}\cdot\delta(f_1-f_2) + \underbrace{(f_1-f_2)\big|_{eq}}_{=0}\cdot\delta(\bar{T}(E))\Big]\,dE$$

és Taylor sorfejtve $\delta(f_1-f_2)$-t

$$\delta(f_1-f_2)\approx(\mu_1-\mu_2)\cdot\frac{\partial f_0}{\partial\mu}\Big|_{eq} = -\frac{\partial f_0}{\partial E}(\mu_1-\mu_2)\,,\quad f_0=\frac{1}{e^{\beta(E-\mu)}+1}\Big|_{\mu=E_F}$$

0. rendű tag zérus

Így $$\boxed{G} = \frac{\delta I}{(\mu_1-\mu_2)/e} = \boxed{\frac{2e^2}{h}\int\bar{T}(E)\cdot\left(-\frac{\partial f_0}{\partial E}\right)dE}$$

Alacsony hőmérsékleten: $f_0(E)\approx\Theta(E_F-E) \Rightarrow -\frac{\partial f_0}{\partial E}=\delta(E_F-E)$

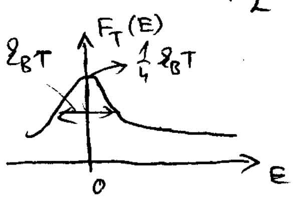
$$\Rightarrow\quad G=\frac{2e^2}{h}\bar{T}(E_F)$$

Mikor jó a lin. válasz?

Számítsuk ki $f_1(E)-f_2(E)$-t!

$$f_1(E)-f_2(E)=\int_{\mu_2}^{\mu_1}\left(\frac{d}{dE'}\frac{1}{e^{\beta(E-E')}+1}\right)dE' = \int_{\mu_2}^{\mu_1}\Big[\underbrace{-\frac{d}{d(E-E')}\cdot\frac{1}{e^{\beta(E-E')}+1}}_{F_T(E-E')}\Big]dE'$$

Legyen $$F_T(E) = -\frac{d}{dE}\cdot\frac{1}{e^{\beta E}+1} = \frac{1}{4k_BT}\cdot\frac{1}{\mathrm{ch}^2\frac{\beta E}{2}}$$



Ekkor $$f_1(E)-f_2(E)=\int_{\mu_2}^{\mu_1}F_T(E-E')\,dE'$$

Az áram (az lap vége):

$$I=\frac{2e}{h}\int\bar{T}(E)\Big[\int_{\mu_2}^{\mu_1}F_T(E-E')\,dE'\Big]dE =$$

$$=\int_{\mu_2}^{\mu_1}\frac{2e}{h}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\bar{T}(E)F_T(E-E')\,dE\Big]dE' = \frac{1}{e}\int_{\mu_2}^{\mu_1}\hat{G}(E')\,dE'$$

ahol $$\hat{G}(E')=\frac{2e^2}{h}\int\bar{T}(E)F_T(E-E')\,dE$$

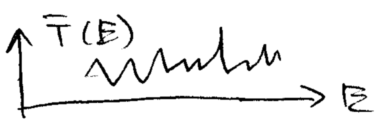
A $\delta\mu = \mu_1 - \mu_2$ alkalmazott feszültségre a rendszer, akkor ad lineáris választ ha $\hat{G}(E)$ nem függ E-től az $\mu_1 > E > \mu_2$ energiatartományban.

$$I = \hat{G}(E_F)\,\frac{\mu_1 - \mu_2}{e} \quad \text{, ahol}$$

$$G = \hat{G}(E_F) = \frac{2e^2}{h}\int \bar{T}(E)\, F_T(E - E_F)\, dE =$$

$$= \frac{2e^2}{h}\int \bar{T}(E)\Bigg[\underbrace{-\frac{d}{dE}\,\frac{1}{e^{\beta(E-E_F)}+1}}_{-\frac{\partial f_0}{\partial E}\big|_{\mu = E_F}}\Bigg] dE$$

Ez pedig az az eredményt, amit korábban $\delta\xi$ számolásából kaptunk. Az $F_T(E)$ egy simító fv., konvolválva $\bar{T}(E)$-vel $\hat{G}(E)$ sima. Általában $\bar{T}(E)$ vadul fluktuál az interferenciák miatt.



ha L_φ nagy és T hőmérséklet kicsi. Ezt simítja az $F_T(E)$ fv. A hőmérséklet „simít”.

$\leftarrow$ $\hat{G}(E)$ csak a k_BT skálán változik, egyébként relatíve sima fv.

Így válasz lineáris, ha $\boxed{\mu_1 - \mu_2 \ll k_B T}$

A méréseknél ezt mindig tartják. Ha L_φ a koherencia hossz, akkor $L_\varphi = D\tau_\varphi$

Van egy másik energia skála is.

$E_c \cong \frac{\hbar}{\tau_\varphi}$ korrelációs energia $\quad E_c \cong 0.006\,\text{meV}$, ha $\tau_\varphi = 100\,\text{ps}$

Ez néha lehet nagy ekkor $\bar{T}(E)$ E_c skálán változik

így általában a lin. válasz jó, ha $\mu_1 - \mu_2 \ll k_B T + E_c$

Több terminál esete (kiterjesztés):

$$I_b = \int \frac{2e}{h}\sum_a \left[\bar{T}_{ab}(E) f_b(E) - \bar{T}_{ba}(E) f_a(E)\right] dE$$

összegszabály: $\sum_a \bar{T}_{ab}(E) = \sum_a \bar{T}_{ba}(E)$ $\quad$ Ez nem egyensúlynál csak akkor igaz, ha nincs rugalmatlan szórás.

$$\Rightarrow I_b = \frac{2e}{h}\int \sum_a \bar{T}_{ba}(E)\left[f_a(E) - f_b(E)\right]$$

Linearizálva (ahogy előbb tettük)

$$\boxed{I_b = \sum_a G_{ba}(V_b - V_a) \quad \text{ahol } G_{ba} = \frac{2e^2}{h}\int \bar{T}_{ba}(E)\left(-\frac{\partial f_0}{\partial E}\right) dE}$$

$$T \to 0 \Rightarrow G_{ba} = \frac{2e^2}{h}\bar{T}_{ba}(E_F)$$

Lehet-e szobahőmérsékleten megfigyelni a kvantált konduktancia lépcsőket?

Ha constriction, W elég kicsi, akkor pl. hard-wall confining potenciállal becsülve $E_1 = \varepsilon_1(k=0) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mW^2}$ (→ diszperziós rel.)

$m = m_e$ tömeggel:

$$E_1 = \frac{4\cdot 10^5}{W^2[\text{Å}^2]}[K] \Rightarrow \begin{aligned} &= 64\,mK, \quad W = 250\,nm \\ &= 40\,K, \quad W = 100\,\text{Å} = 10\,nm \\ &= 400\,K!, \quad W = 10\,\text{Å} = 1\,nm \end{aligned}$$

Így ≈ rácsállandó szélességű csövekben már a lépcsőket nem keni el a $F_T(E)$ függvény (ennek szélessége $k_B T$) a szobahőmérsékleten sem. Ezek becslések. De már kísérletileg kimutatták!! Fólia

Pauli-elv?

Vajon módosítani kell az áramkifejezést a Pauli-elv miatt.

$$I_a = \int \frac{2e}{h} \sum_b \left[\bar{T}_{ab}(E)\, f_b(E) - \bar{T}_{ba}(E)\, f_a(E)\right] dE$$

$$\uparrow \qquad\qquad\qquad \uparrow$$

$$f_b\cdot(1-f_a) \qquad\qquad f_a(1-f_b)$$

Ha figyelembe vennénk és átrendeznénk I_b-t, kapjuk

$$I_a = \int \frac{2e}{h} \sum_b \left[\bar{T}_{ab} f_b - \bar{T}_{ba} f_a\right] - \underbrace{(\bar{T}_{ab} - \bar{T}_{ba})}_{\text{ez az extra tag.}}\cdot f_b f_a$$

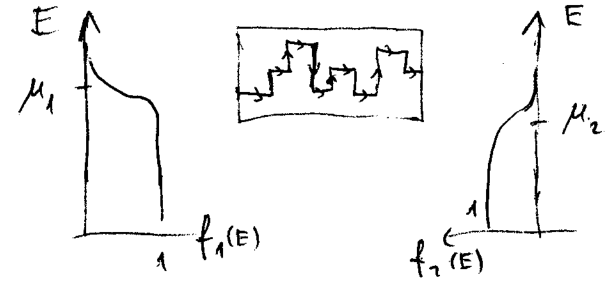
Ha $\bar{T}_{ab} = \bar{T}_{ba}$, akkor az extra tag zérus.
Így nem lényeges, hogy figyelembe vesszük a Pauli-elvet vagy nem.
Korábban (1930-tól számítva) a tunnelezési probléma-knál (pl. tranzisztor) mindig figyelembe vették a Pauli-elvet.
Két-terminál rendszernél $\bar{T}_{12} = \bar{T}_{21}$ mindig igaz az összegszabály miatt. Ezért nem merült fel korábban ez a kérdés.

Azonban $\underline{B} \neq 0$ méréseknél ált. $T_{ab} \neq T_{ba}$. Így a Pauli-elv nélkül vagy azzal, az eredmény különbözni fog.

Megmutatjuk, hogy $\boxed{\text{koherens vezetőre}: T_{ab} = T_{ba}}$

(Az 1-f tényezővel a linearizálás I-ben (ahogy ezt előbb tettük) bonyolultabb kifejezésre vezetne.)

Nem koherens rugalmas transzport: $L \gg L_\varphi$

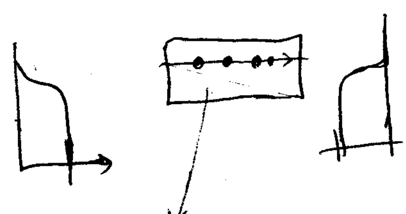


„Vertical flow”
Az elektron különböző „energiacsatornán” mozoghat általában.

~~Deoldhas~~ Így az elektron transzport rugalmatlan és az 1-f faktor kell.

Ha feltesszük, hogy a transzport rugalmas, akkor nincs energia disszipáció. Az impulzus relaxáció (változás) eredményezi az ellenállást. (Az energia cserék csak az egyensúlyt biztosítják.)

Ez a feltevés



Nincs „vertical-flow”.
⇒ rugalmas transzport.
Csak energiacsatornánként folyik a transzport.

fázis ugrások lehetnek
(nem koherens transzport)

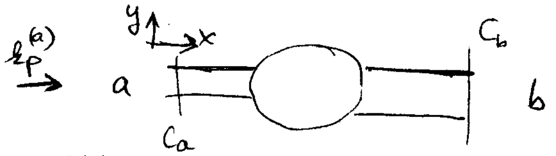
Ez a model ($\boxed{\text{nem koherens rugalmas transzport}}$) gyakran nagyon jó és az $\boxed{\text{1-f faktor sem kell}}$ (sok koherens vezető összekapcsolva, de az ~~...~~ energia csatornán történik a transzport) és a koherens rugalmas szórás, melyre be fogjuk látni, hogy nem kell 1-f faktor.)

Ha $\mu_1 - \mu_2 +$ néhány $k_BT \ll E_c$ (ahol E_c az az energia, melyen a transzmisszió $\bar{T}(E)$ uniform.)

akkor még „vertical-flow” esetén is jó a „Büttiker-formula”, nem kell 1-f faktor.

~~Ko~~Koherens vezető:

Először nézzünk két terminált. $\underline{B}$ tér.



Sch-egyenlet megoldása:

Tfh.: az "a" oldalon bejön egy $\chi_p^{(a)}(y_a)\frac{1}{\sqrt{L}}e^{+ik_p^{(a)}x_a}$ elektron

$\chi_p^{(a)}$ a p. módus keresztirányú hullámfv.-e az "a" oldalon.

Az elektron energiája: E_F, így pl. Hard-wall-ra:

$$E(k)=\frac{\hbar^2}{2m}\left[(k_p^{(a)})^2+\frac{p^2\pi^2}{W_a^2}\right] \Rightarrow \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}=E_F=\frac{\hbar^2}{2m}\left\{[k_p^{(a)}]^2+\frac{p^2\pi^2}{W_a^2}\right\}$$

$k_p^{(a)}$

L hosszúságú az "a" oldal, így normált a hullámfv.

$$\Rightarrow k_p^{(a)}=\sqrt{k_F^2-\frac{p^2\pi^2}{W_a^2}}$$

Más esetekben $\chi_p^{(a)}$ bonyolultabb (esetleg $\underline{B}$-től is függ.....); de $k_F^2=k_p^2+?$ felbontás így lehetséges, mert a H-t szeparáljuk.

Az "a" oldalon a megoldás:

$$\psi_p^{(a)}(x_a,y_a)=\chi_p^{(a)}(y_a)\frac{1}{\sqrt{L}}e^{+ik_p^{(a)}x_a}+\sum_{m\in a}\hat r_{mp}^{(aa)}\chi_m^{(a)}\frac{1}{\sqrt{L}}\cdot e^{-ik_m^{(a)}x_a}$$

$\to \psi_p^{(a)}(x_a)$-ban p index csak emlékeztető, hogy a bemenő egy p-ből jött.

A "b" oldalon a megoldás:

$$\psi_p^{(b)}(x_b,y_b)=\sum_{\ell\in b}\hat t_{\ell p}^{(ba)}\,\chi_\ell^{(b)}(y_b)\,\frac{1}{\sqrt{L}}\cdot e^{ik_\ell^{(b)}x_b}$$

~~A~~ C_a keresztmetszeten átmenő áramsűrűség:

$$\underline{j}_p^{(a)}=+\frac{ei\hbar}{2m}\left(\psi\,\mathrm{grad}\,\psi^*-\psi^*\,\mathrm{grad}\,\psi\right)=$$

$$=\frac{ei\hbar}{2m}\frac{1}{L}\left\{\left(\chi_p^{(a)}(y_a)e^{ik_p^{(a)}x_a}+\sum_m\hat r_{mp}^{(aa)}\chi_m^{(a)}e^{-ik_m^{(a)}x_a}\right)\left[\chi_p^{*(a)}(-ik_p^{(a)})e^{-ik_p^{(a)}x_a}+\sum_n\hat r_{np}^{*(aa)}(+ik_n^{(a)})\cdot e^{+ik_n^{(a)}x_a}\chi_n^{*(a)}\right]\hat{\underline{x}}_a - c.c.\right\}$$

$$I_p^{(a)}=\int_{C_a}\underline{j}_a\,dy_a\cdot\hat{\underline{x}}_a=\frac{1}{L}\cdot\frac{ei\hbar}{2m}\left\{\underbrace{\int_{C_a}dy_a\,(-ik_p^{(a)})\,\chi_p^{(a)}\chi_p^{*(a)}}_{-ik_p^{(a)}}+\sum_{m,n}\underbrace{\int dy_a\,(+ik_n^{(a)})\,\hat r_{mp}\hat r_{np}^{*}\cdot e^{i(k_m^{(a)}-k_n^{(a)})x_a}\chi_m^{(a)}\chi_n^{*(a)}}_{\delta_{mn}}\right.$$

$$\left.- c.c. + \text{a keresztagok kiejtik egymást.}\right\}=$$

$$I_p^{(a)} = \frac{e\hbar}{m}\frac{1}{L}k_p^{(a)} - \frac{e\hbar}{m}\frac{1}{L}\sum_n \hat{r}_{np}^{(aa)}\hat{r}_{np}^{*}k_n^{(a)} =$$

$$= \frac{e\hbar}{m}\frac{k_p^{(a)}}{L}\left[1 - \sum_{n\in a} r_{np}^{(aa)} r_{np}^{(aa)*}\right],$$

ahol $\left\| r_{np}^{(aa)} = \hat{r}_{np}^{(aa)}\sqrt{\frac{k_n^{(a)}}{k_p^{(a)}}} \right\|$

Hasonlóan kiszámoljuk alább a jobb oldalon is $I_p^{(b)}$-t és áram marad

Mivel $I_p^{(a)} = I_p^{(b)} \Rightarrow$

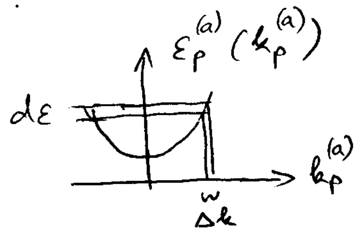
$$\boxed{1 = \sum_{n\in a}|r_{np}|^2 + |t_{np}|^2}$$

$$f^{(a)}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu_a)}+1}$$

A C_a-n átmenő teljes áram.

$$I\big|_{C_a} = \sum_p I_p^{(a)} = \frac{1}{L}\int \sum_p \frac{e\hbar}{m} k_p^{(a)} \cdot \rho_p^{(a)}(\varepsilon)\cdot f^{(a)}(\varepsilon)\,d\varepsilon\left[1 - \sum_n |r_{np}|^2\right] =$$

$\rho(\varepsilon) = ?$



Hard-wall-ra

$$\varepsilon_p^{(a)}(k_p^{(a)}) = \frac{\hbar^2}{2m}\left[(k_p^{(a)})^2 + \frac{p^2\pi^2}{W_a^2}\right]$$

$$\Delta k = d\varepsilon \cdot \frac{1}{\frac{d\varepsilon_p^{(a)}(k_p^{(a)})}{dk_p^{(a)}}} = d\varepsilon\,\frac{1}{\frac{\hbar^2 k_p^{(a)}}{m}}$$

$$\rho_p^{(a)}(\varepsilon) = 2\,\frac{L}{2\pi}\,\frac{\Delta k}{d\varepsilon} = \frac{L}{\pi}\,\frac{m}{\hbar^2}\,\frac{1}{k_p^{(a)}}$$

$$\Rightarrow\ I\big|_{C_a} = \int \frac{1}{\cancel{L}}\frac{e\cancel{\hbar}}{\cancel{m}}\cancel{k_p^{(a)}}\cdot\frac{\cancel{L}}{\pi}\frac{\cancel{m}}{\cancel{\hbar^2}}\frac{1}{\cancel{k_p^{(a)}}}\, f^{(a)}(\varepsilon)\,d\varepsilon\left[\underbrace{\sum_{p\in a} 1}_{M_a} - \sum_{np}|r_{np}|^2\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{I\big|_{C_a} = \frac{2e}{h}\int f^{(a)}(\varepsilon)\left[M_a - \sum_{\substack{n\in a\\ m\in a}} (\underline{\underline{r}}^{(aa)})_{mn}(\underline{\underline{r}}^{(aa)*})_{mn}\right]d\varepsilon}$$

Hasonlóan a C_b-n átmenő áram:

$$\boxed{I\big|_{C_b} = \frac{2e}{h}\int f^{(a)}(\varepsilon)\sum_{\substack{n\in a\\ m\in b}} (\underline{\underline{t}}^{(ba)})_{mn}(t^{(ba)*})_{mn}\,d\varepsilon}$$

reflexionless

ahol $(\underline{\underline{t}}^{(ba)})_{\ell p} = (\hat{\underline{\underline{t}}}^{(ba)})_{\ell p}\sqrt{\frac{k_\ell^{(b)}}{k_p^{(a)}}}$

$I\big|_{C_b}$ az az áram, amely abból származik, hogy a baloldalon elindul egy p modusú elektron (mely termikusan egyensúlyban van a baloldali rezervoirral) és transzmittálódik a jobb oldalra.

Áram megmarad $\Rightarrow I\big|_{C_a} = I\big|_{C_b} \Rightarrow \sum_{\substack{n\in a\\ m\in a}} (\underline{\underline{r}}^{(aa)})_{mn}(\underline{\underline{r}}^{*(aa)})_{mn} + \sum_{\substack{n\in a\\ m\in b}} (\underline{\underline{t}}^{(ba)})_{mn}(\underline{\underline{t}}^{*(ba)})_{mn} = M_a$

De ez igaz egy kiválasztott csatornára is, azaz így is megmarad az áram.

Az $I|_{c_a}$ és $I|_{c_b}$-t felírhatjuk egy képletbe is. Legyen a koordinátarendszer a bal és jobb oldalon

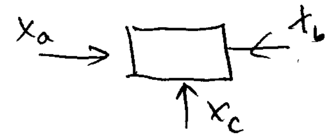
Ekkor az "a"-ból ⟶ "b"-be menő áram:

$$I_b = \frac{2e}{h}\int\Big[f^{(a)}(\varepsilon) M_a \delta_{ab} - \sum_{\substack{n\in a\\ m\in b}} (\underline{\underline{t}}^{(ba)})_{mn} (\underline{\underline{t}}^{*(ba)})_{mn} \cdot f^{(a)}(\varepsilon)\Big] d\varepsilon$$

Ha b=a, akkor $I|_{c_a}$, ha b≠a ⇒ $-I|_{c_b}$ (és mivel a koordinátarendszer most ellentétes x_b-ben, mint korábban $I|_{c_b}$-nél.)

↓ és $\underline{\underline{t}}^{(aa)} = \underline{\underline{r}}^{(aa)}$

Sok terminálra általánosítás:



$$I_b = \frac{2e}{h}\int \sum_a\Big[f^{(a)}(\varepsilon) M_a \delta_{ab} - \sum_{\substack{n\in a\\ m\in b}} (\underline{\underline{t}}^{ba})_{mn} (\underline{\underline{t}}^{*(ba)})_{mn} \cdot f^{(a)}(\varepsilon)\Big] d\varepsilon$$

$M_b f^{(b)}(\varepsilon)$ a δ_{ab} miatt

Kitérő:

$$\begin{array}{c} \\ M_a\{ \\ M_b\{ \\ M_c\{ \end{array}\begin{array}{c} \;\overbrace{\;\;}^{M_a}\quad\overbrace{\;\;}^{M_b}\quad\overbrace{\;\;}^{M_c} \\ \begin{bmatrix} \underline{\underline{t}}^{(aa)} & \underline{\underline{t}}^{(ab)} & \underline{\underline{t}}^{(ac)} \\ \underline{\underline{t}}^{(ba)} & \underline{\underline{t}}^{(bb)} & \underline{\underline{t}}^{(bc)} \\ \underline{\underline{t}}^{(ca)} & \underline{\underline{t}}^{(cb)} & \underline{\underline{t}}^{(cc)} \end{bmatrix}\end{array} = \begin{array}{c} \\ M_a\{ \\ \\ M_b\{ \\ M_c\{ \end{array}\begin{array}{c} \overbrace{\quad}^{M_a}\;\overbrace{\quad}^{M_b}\;\overbrace{\quad}^{M_c} \\ \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1M_T} \\ S_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ S_{M_T 1} & \cdots & \cdots & S_{M_T M_T} \end{bmatrix}\end{array} = \underline{\underline{S}}$$

$M_T \times M_T$ mátrix

$\underline{\underline{S}}$-mátrix

ahol $\boxed{M_T = \sum_a M_a}$ a total keresztmódusok száma.

Az áram megmarad ⇒ $\sum_m |S_{mn}|^2 = 1, \forall n$ (oszlopok összege = 1 (de a soroké is = 1!))
minden bemenő n csatornára ezt látjuk, illetve megmutathatjuk

$$|out\rangle = \underline{\underline{S}}\,|in\rangle$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{M_T}\end{pmatrix} = \underline{\underline{S}} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{M_T}\end{pmatrix}$$

A terminálok és módusok azonos szinten vannak kezelve az $\underline{\underline{S}}$-mátrixban.

⇒ $\underline{\underline{S}}$ unitér ⇒ $S^\dagger S = 1$ vagy $S S^\dagger = 1$ (⟺)

↑ ez az ismert alak az áram-megmaradásra.

$$\left[(\underline{\underline{r}}^\dagger \underline{\underline{r}}) + \underline{\underline{t}}^\dagger \underline{\underline{t}}\right] = \underline{\underline{1}}$$

Definiáljuk a transzmissziós fv.:

$$\bar{T}_{ba} = \sum_{\substack{n\in a\\ m\in b}} |S_{m\leftarrow n}|^2 = \sum_{\substack{n\in a\\ m\in b}} \left(\underline{\underline{t}}^{(ba)}\right)_{mn} \left(\underline{\underline{t}}^{*(ba)}\right)_{mn}$$

megj.: ha $a\equiv b$ (a bal és jobb oldal szimmetrikus), akkor $\bar{T} = \mathrm{Tr}\, \underline{\underline{t}}^{+}_{ba}\, \underline{\underline{t}}_{ba}$

ezeknek a $\overset{M_b}{\square}\}_{M_a}$ ~~han~~ lévő $|S_{ij}|^2$ elemek összege.

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & M_a & M_b & \\
M_a & \underline{\underline{t}}_{aa} & \underline{\underline{t}}_{ab} & \square \\
M_b & \underline{\underline{t}}_{ba} & \underline{\underline{t}}_{bb} & \square \\
M_c & \square & \square & \square
\end{array}
\qquad
\begin{matrix} 0\\ 0\\ 1 \leftarrow n\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{matrix}
\begin{matrix} \left.\right\} M_a \\ \left.\right\} M_b \\ \left.\right\} M_c \end{matrix}$$

M_a db oszlop van és $\forall$-ik oszlopra igaz, hogy $\sum_m |S_{mn}|^2 = 1$, $\forall$ n-re

$\Rightarrow$ összegszabály $\boxed{\sum_b \bar{T}_{ba} = M_a}$ $\xrightarrow[\text{az elsőre kell } \Sigma\text{-ni}]{\text{index csere}}$ $\sum_a \bar{T}_{ab} = M_b$

$\Rightarrow \sum_{ab} \bar{T}_{ab} = M_T = \sum_a M_a$

Visszatérve az áram kifejezéshez:

$$I_b = \frac{2e}{h} \int M_b f^{(b)}(\varepsilon) - \sum_a \bar{T}_{ba} f^{(a)}(\varepsilon)\, d\varepsilon =$$

ide beírjuk $\sum_a \bar{T}_{ab}$

$$= \frac{2e}{h} \int \left[\sum_a \bar{T}_{ab} f^{(b)}(\varepsilon) - \sum_a \bar{T}_{ba} f^{(a)}(\varepsilon)\right] d\varepsilon$$

Ez a Büttiker-formula. A Pauli-elvből jövő $1-f$ faktor nem jelent meg.

A levezetés jó $\underline{B}\neq 0$ mágneses tér esetén is!

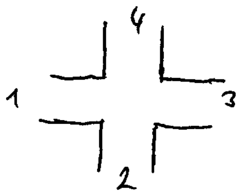
$\bar{T}_{ba}|_{+B} = \bar{T}_{ab}|_{-B}$ felhasználjuk (ezt később koherens vezetőre belátjuk)

$$I_b = \sum_a G_{ba}[V_b - V_a]$$

ahol $G_{ba} = \frac{2e^2}{h} \int \bar{T}_{ba}(E)\left(-\frac{\partial f_0}{\partial E}\right) dE \;\hat{=}\; \frac{2e^2}{h} \bar{T}_{ba}(E_F)$ $\quad T\to 0K^\circ$

és $\bar{T}_{ba} = \sum_{\substack{n\in a\\ m\in b}} |S_{mn}|^2$

Egy példa:



Tfh. a négy terminál teljesen azonos.

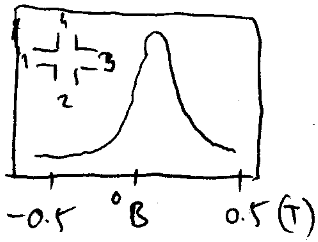
$$\overline{T}_{13} = \overline{T}_{31} = \overline{T}_{42} = \overline{T}_{24} = T_F$$

$$\overline{T}_{21} = \overline{T}_{32} = \overline{T}_{43} = \overline{T}_{14} = T_R$$

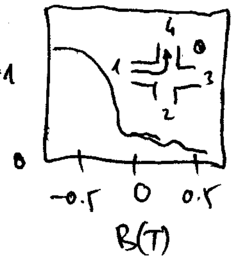
$$\overline{T}_{41} = \overline{T}_{12} = \overline{T}_{23} = \overline{T}_{34} = T_L$$

Tfh. megmértük a T_F, T_R és T_L -t (hogy hogyan lásd később!) B térben.

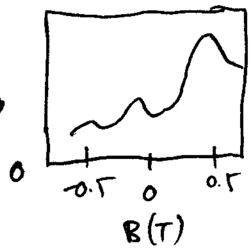
$T_F = T_{31}$



$T_L = T_{41}$



$T_R = T_{14}$



Hall-mérést csinálunk: 1–3 → áram
2–4 → voltmérő $\quad R_H = ?$

Megoldás: Legyen $V_4 = 0$ $\qquad I_b = \sum_a G_{ba}(V_b - V_a)$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \frac{2e^2}{h} \cdot \begin{bmatrix} T_0 & -T_L & -T_F \\ -T_R & T_0 & -T_L \\ -T_F & -T_R & T_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}, \qquad T_0 = T_F + T_R + T_L$$

Invertálva:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}, \text{ ahol}$$

$$R_{21} = \frac{h}{2e^2} \cdot \frac{T_L T_0 + T_F T_R}{\Delta}, \qquad R_{23} = \frac{h}{2e^2} \frac{T_R T_0 + T_F T_L}{\Delta}$$

és $\Delta = (T_L + T_F) \cdot \left[T_L^2 + T_R^2 + 2T_F^2 + 2T_F T_L + 2T_F T_R \right]$

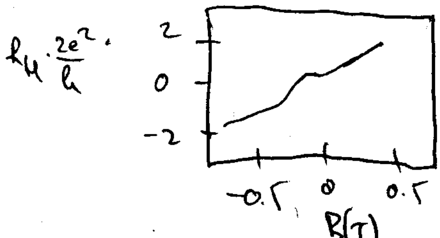
Hall-mérésnél $\quad I_1 = -I_3$ és $I_2 = I_4 = 0$

$$\Rightarrow \quad V_2 = (R_{21} - R_{23})\, I_1$$

$$R_H = \frac{V_2 - \overset{=0}{V_4}}{I_1} = \frac{V_2}{I_1} = \frac{h}{2e^2}\,\frac{(T_L - T_R)(T_L + T_R)}{\Delta} =$$

$$R_H = \frac{h}{2e^2}\,\frac{T_L - T_R}{T_L^2 + T_R^2 + 2T_F^2 + 2T_F T_L + 2T_F T_L}$$

A fenti mért T_F, T_R, T_L adatokkal

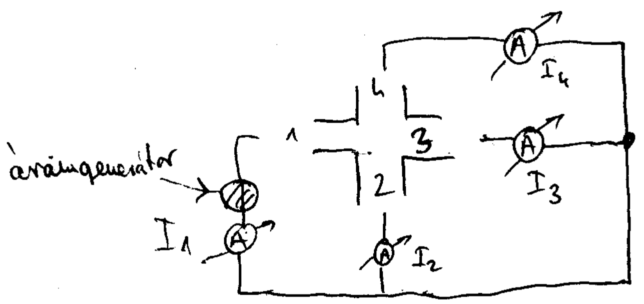


PRB $\underline{46}$, 9648 ('92)

T_F, T_R, T_L mérése (elvi) lásd PRB $\underline{46}$, 9648 ('92))

A 2–3 pontokat rövidre zárjuk

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \frac{2e^2}{h} \cdot \begin{bmatrix} T_0 & -T_L & -T_R \\ -T_R & T_0 & -T_L \\ -T_F & -T_L & T_0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ -2 \\ -3 \end{array}$$



$$I_1 = \frac{2e^2}{h}\, T_0 \cdot V_1$$

$$I_2 = \frac{2e^2}{h}\,(-T_R) \cdot V_1$$

$$I_3 = \frac{2e^2}{h}\,(-T_F) \cdot V_1$$

általános esetek.

S-mátrix tulajdonságai:

Árammegmaradásból láttuk:

$$\sum_m |S_{mn}|^2 = 1 \quad , \forall n\text{-re}$$ oszlopok $|\bullet|^2$ összege = 1.

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{S}}$ unitér $\Rightarrow$ $\underline{\underline{S}}^+\underline{\underline{S}} = 1 = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{S}}^+$

ki $\rightarrow$ $\underline{b} = \underline{\underline{S}}\,\underline{a}$ $\leftarrow$ be

$$\sum_{m=1}^{M_T} |S_{mn}|^2 = \sum_{m=1}^{M_T} |S_{nm}|^2 = 1$$

összeg szabály: $\sum_a \overline{T}_{ab} = \sum_a \sum_{n\in b} \sum_{m\in a} |S_{mn}|^2 = \sum_{n\in b} 1 = M_b$ láttuk.

$$\left\| \sum_a \overline{T}_{ab} = \sum_a \overline{T}_{ba} = M_b \right\|$$

Reciprocitás: Korábban állítottuk, hogy

$$G_{ab}\big|_{+B} = G_{ba}\big|_{-B}$$

Most bebizonyítjuk koherens vezetőre ezt. $\underline{\underline{S}}|_B = \underline{\underline{\tilde{S}}}|_{-B}$, azaz

Ezt kell belátni: $\sum_{\substack{n\in a\\ m\in b}} |S_{mn}|^2\Big|_{+B} = \sum_{\substack{n\in a\\ m\in b}} |S_{nm}|^2\Big|_{-B}$

$$H\psi = E\psi \Rightarrow H = \frac{(i\hbar\,\mathrm{grad} + e\underline{A})^2}{2m} + U(x,y)$$

$H^*\psi^* = E\psi^*$ és $B \rightarrow -B$

$$\Rightarrow \left[\frac{(i\hbar\nabla + eA)^2}{2m} + U(x,y)\right]\psi^* = E\psi^*$$

$$\Rightarrow \psi^*(x,y)\big|_{-B} = \psi(x,y)\big|_{B}$$

$-\underline{B}$ térben a ψ^* ugyanaz mint ψ a $+\underline{B}$ térben.

Ha ismerjük a m.o(ψ)a Sch. egyenletre $+\underline{B}$-térben, akkor a megoldás a $-\underline{B}$-térben (ψ^*).

Ha viszont ψ^*-t számoljuk, akkor $\forall$ bemenő hullám kimenővé válik és fordítva:

$$\underline{b} = \underline{\underline{S}}\big|_{+B}\,\underline{a} \quad \Rightarrow \quad \underline{b}^* = \underline{\underline{S}}^*\big|_{+B}\,\underline{a}^*$$

B tér csere és komplex konjugálás kimenő ↔ bemenő

$$\underline{a}^* = \underline{\underline{S}}\big|_{-\underline{B}}\cdot\underline{b}^* \quad \Rightarrow \quad \underline{b}^* = \underline{\underline{S}}^{-1}\big|_{-B}\,\underline{a}^*$$

$$\boxed{\underline{\underline{S}}^*\big|_{+\underline{B}} = \underline{\underline{S}}^{-1}\big|_{-\underline{B}}}$$

kimenő

$a^* \sim e^{-ikx} \leftarrow a \sim e^{ikx}$

+x irányban terjed

−x irányban terjed.

de $\underline{\underline{S}}$ unitér $\quad S^{-1}\big|_{-B} = S^{+}\big|_{-B}$

$$\Rightarrow \quad S^*\big|_{+B} = S^{+}\big|_{-B}$$

vegyük a $*$-ot $\forall$ két oldalon

(megj.: $\underline{\underline{S}}^{+} = \tilde{\underline{\underline{S}}}^{*}$)

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{S}}\big|_{+B} = \tilde{\underline{\underline{S}}}\big|_{-B}$$

$$\Rightarrow \quad S_{mn}\big|_{+B} = S_{nm}\big|_{-B}$$

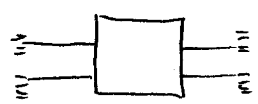
$|\,|^2$ véve $\forall$ két oldalra és $\sum_{\substack{m\in b\\ n\in a}}$ $\Rightarrow$ kapjuk $G_{ab}\big|_{+B} = G_{ba}\big|_{-B}$

Ismétlés:

$$\underline{\underline{S}} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{M_a} & \overbrace{\quad}^{M_b} \end{array} \\ \begin{array}{c} M_a\{ \\ M_b\{ \\ \vdots \end{array} & \begin{bmatrix} \underline{t}_{aa} & t_{ab} & \cdots \\ \underline{t}_{ba} & & \\ \vdots & & \end{bmatrix} \end{array}$$

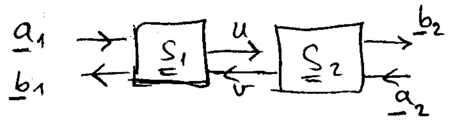
~~Két terminálra~~ Általános alak:

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{r}} & \underline{\underline{t}}' \\ \underline{\underline{t}} & \underline{\underline{r}}' \end{bmatrix} \quad \rightarrow$$



két terminálra $\rightarrow$ bal $\quad$ jobb

Soros kapcsolás



$\Rightarrow$ $\boxed{S_1 \otimes S_2}$

$$\begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{u} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{r}}^{(1)} & \underline{\underline{t}}'^{(1)} \\ \underline{\underline{t}}^{(1)} & \underline{\underline{r}}'^{(1)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{a}^{(1)} \\ \underline{v} \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} \underline{v} \\ \underline{b}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{r}}^{(2)} & \underline{\underline{t}}'^{(2)} \\ \underline{\underline{t}}^{(2)} & \underline{\underline{r}}'^{(2)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix}$$

Kifejezve u-t és v-t:

$$\begin{pmatrix} \underline{b}^{(1)} \\ \underline{b}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{r}} & \underline{\underline{t}}' \\ \underline{\underline{t}} & \underline{\underline{r}}' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{a}^{(1)} \\ \underline{a}^{(2)} \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{S}}_1 \otimes \underline{\underline{S}}_2 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{r}} & \underline{\underline{t}}' \\ \underline{\underline{t}} & \underline{\underline{r}}' \end{bmatrix}$$

ahol

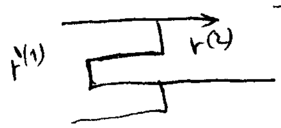
$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{t}} &= \underline{\underline{t}}^{(2)} \left[\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{r}}'^{(1)} \underline{\underline{r}}^{(2)}\right]^{-1} \underline{\underline{t}}^{(1)}, \quad \underline{\underline{r}} = \underline{\underline{r}}^{(1)} + \underline{\underline{t}}'^{(1)} \underline{\underline{r}}^{(2)} \left[\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{r}}'^{(1)} \underline{\underline{r}}^{(2)}\right]^{-1} \underline{\underline{t}}^{(1)} \\ \underline{\underline{t}}' &= \underline{\underline{t}}'^{(1)} \left[\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{r}}^{(2)} \underline{\underline{r}}'^{(1)}\right]^{-1} \underline{\underline{t}}'^{(2)}, \quad \underline{\underline{r}}' = \underline{\underline{r}}'^{(2)} + \underline{\underline{t}}^{(2)} \left[\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{r}}'^{(1)} \underline{\underline{r}}^{(2)}\right]^{-1} \underline{\underline{r}}'^{(1)} \underline{\underline{t}}'^{(2)} \end{aligned}}$$

Könnyen belátható, hogy egy-módus esetén (koherens): $t = \dfrac{t_1 t_2}{1 - r_1' r_2} \Rightarrow T = |t|^2 = \dfrac{T_1 T_2}{1 - 2\sqrt{R_1 R_2}\cos\theta + R_1 R_2}$

ahol $\theta = \text{phase}(r_1') + \text{phase}(r_2)$

Feynmann path:

$$\underline{\underline{t}} = \underline{\underline{t}}^{(2)} \left[\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{r}}'^{(1)} \underline{\underline{r}}^{(2)}\right]^{-1} \underline{\underline{t}}^{(1)} = \underline{\underline{t}}^{(2)} \underline{\underline{t}}^{(1)} + \underline{\underline{t}}^{(2)} \underline{\underline{r}}'^{(1)} \underline{\underline{r}}^{(2)} \underline{\underline{t}}^{(1)} + \underline{\underline{t}}^{(2)} \left[\underline{\underline{r}}'^{(1)} \underline{\underline{r}}^{(2)}\right]\left[\underline{\underline{r}}'^{(1)} \underline{\underline{r}}^{(2)}\right] \underline{\underline{t}}^{(1)} + \ldots$$

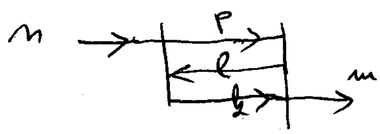


$t^{(2)}\, t^{(1)}$

$t^{(2)}\, r'^{(1)} r^{(2)}\, t^{(1)}$

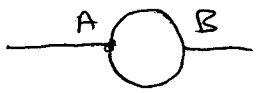
Az mn komponens pl. a 2. tagra:

$$\left[t^{(2)} r'^{(1)} r^{(2)} t^{(1)}\right]_{mn} \rightarrow \sum_{k,l,p} t^{(2)}_{mk}\, r'^{(1)}_{kl}\, r^{(2)}_{lp}\, t^{(1)}_{pn}$$



$(\underline{\underline{t}})_{mn} = \sum_P A_P$, ahol P az összes path mely az n. módusból indul és az m. módusban végződik.

Párhuzamos kapcsolás:



Egymódusú karika, R sugarú

Tfh. A és B szimmetrikus 3 elágazásos pont.

Legyen ezeknek az $\underline{\underline{S}}$-mátrixa:

$$\begin{bmatrix} c & \sqrt{\varepsilon} & \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon} & a & b \\ \sqrt{\varepsilon} & b & a \end{bmatrix}, \quad a, b, c, \varepsilon \in \mathbb{R}$$

a.) Mutassuk meg, hogy $c = \pm\sqrt{1-2\varepsilon}$ és $a = \frac{1-c}{2}$, $b = \frac{1+c}{2}$

b.) Számítsuk ki a transzmissziót!

Megoldás: a.) $\underline{\underline{S}}^{+}\underline{\underline{S}} = 1$ miatt

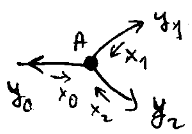
$$\begin{bmatrix} c & \sqrt{\varepsilon} & \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon} & a & b \\ \sqrt{\varepsilon} & a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & \sqrt{\varepsilon} & \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon} & a & b \\ \sqrt{\varepsilon} & b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ elvégezve a ..... szorzást.

$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 1 - \varepsilon, \quad c^2 = 1 - 2\varepsilon, \quad 2ab = -\varepsilon, \quad a + b + c = 0$

egy megoldás: $a = \frac{1-c}{2}$, $b = \frac{1+c}{2}$ és $c = \sqrt{1-2\varepsilon}$

további megoldások vagy úgy kaphatók, hogy a-t és b-t felcseréljük, vagy úgy, hogy c-t negatívnak vesszük.

b.) Legyen a baloldali Y ágnál: $\forall$-n ágban egy módus „él".



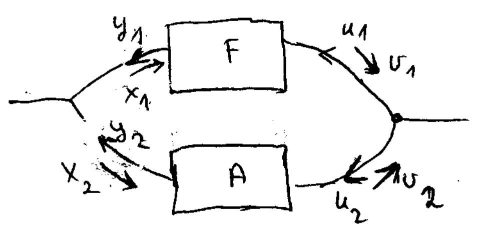
$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c & \sqrt{\varepsilon} & \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon} & a & b \\ \sqrt{\varepsilon} & b & a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ Ez felfogható

$$\begin{bmatrix} \boxed{c} & \boxed{\sqrt{\varepsilon}\ \sqrt{\varepsilon}} \\ \boxed{\begin{matrix} \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{r}} & \underline{\underline{t}}' \\ \underline{\underline{t}} & \underline{\underline{r}}' \end{bmatrix}$$, azaz $\underline{\underline{r}} = c$, $\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix}$

$\underline{\underline{r}}' = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, $\underline{\underline{t}}' = [\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon}]$

Vizsgáljuk az alsó ill. felső ágat:

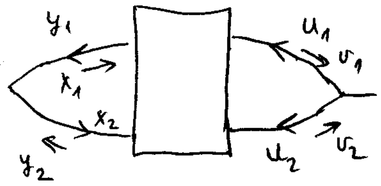
Először tfh. mindkét ág egy-egy $\begin{bmatrix} r & t' \\ t & r' \end{bmatrix}$ mátrixszal írható le (általánosan)



$$\begin{pmatrix} y_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_F & t'_F \\ t_F & r'_F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ u_1 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{F, felső}$$

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r_A & t'_A \\ t_A & r'_A \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{A, alsó}$$

A két ág (alsó, felső) felfogható egy egységnek:



Az előbbi egyenletek alapján:

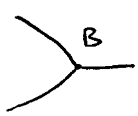
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r_F & 0 & t'_F & 0 \\ 0 & r_A & 0 & t'_A \\ t_F & 0 & r'_F & 0 \\ 0 & t_A & 0 & r'_A \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Így ennek az egységnek az $\underline{\underline{S}}$-mátrixa tekinthető két modusú két terminálú rendszernek.

$$\underline{\underline{r}} = \begin{pmatrix} r_F & 0 \\ 0 & r_A \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{t}}' = \begin{pmatrix} t'_F & 0 \\ 0 & t'_A \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{t}} = \begin{pmatrix} t_F & 0 \\ 0 & t_A \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{r}}' = \begin{pmatrix} r'_F & 0 \\ 0 & r'_A \end{pmatrix}$$

A B-portnál az $\underline{\underline{S}}$-mátrix:

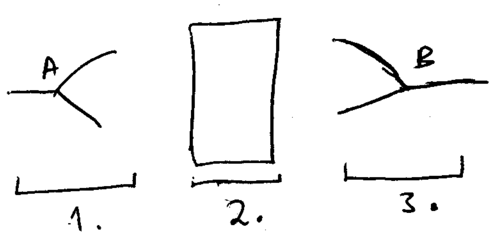


$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon} \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} \sqrt{\varepsilon} & \sqrt{\varepsilon} \end{matrix}} & \boxed{c} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{r}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{t}}' = \begin{bmatrix} \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{t}} = [\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon}] \qquad \underline{\underline{r}}' = c$$

3 db egység van, sorosan kapcsolva:



Legyen $r_F = r_A = 0$ és $r'_F = r'_A = 0$

$t_F = t_A = e^{i\theta} = p$

Tiszta transzmisszió (nincs reflexió!)

$\Downarrow$

1–2 kapcsolás (soros):

$$\underline{\underline{S}}_1 \otimes \underline{\underline{S}}_2 = \begin{bmatrix} \boxed{c} & \boxed{\begin{matrix} \sqrt{\varepsilon} & \sqrt{\varepsilon} \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix}} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} r_F & 0 \\ 0 & r_A \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} t'_F & 0 \\ 0 & t'_A \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} t_F & 0 \\ 0 & t_A \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} r'_F & 0 \\ 0 & r'_A \end{matrix}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \boxed{c} & \boxed{[\sqrt{\varepsilon}\ \sqrt{\varepsilon}] \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}} \\ \boxed{\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix}} & \boxed{\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{\underline{r}} & \underline{\underline{t}}' \\ \underline{\underline{t}} & \underline{\underline{r}}' \end{pmatrix} \text{ alakú.}$$

$(1 \otimes 2) \otimes 3 \Rightarrow$

$$= \begin{bmatrix} \boxed{c} & (\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon})\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix}}_{= t^{(1)}} & \underbrace{\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}}_{= r'^{(1)}} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \overset{r^{(2)}}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}}} & \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix} \\ \underbrace{(\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon})}_{= t^{(2)}} & c \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{t}} = \underline{\underline{t}}^{(2)} \left[\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{r}}'^{(1)} \underline{\underline{r}}^{(2)} \right]^{-1} \underline{\underline{t}}^{(1)} =$$

$$= [\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon}] \cdot \left[I - \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix} =$$

$$= [\sqrt{\varepsilon}\ \sqrt{\varepsilon}] \cdot \left[I - \begin{bmatrix} (a^2+b^2)\rho^2 & 2ab\rho^2 \\ 2ab\rho^2 & (a^2+b^2)\rho^2 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \rho\sqrt{\varepsilon} \\ \rho\sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix} =$$

kihasználjuk a, b, és ε közti összefüggéseket.

$$= [\sqrt{\varepsilon}\ \sqrt{\varepsilon}] \cdot \begin{bmatrix} 1-(1-\varepsilon)\rho^2 & \varepsilon\rho^2 \\ \varepsilon\rho^2 & 1-(1-\varepsilon)\rho^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \rho\sqrt{\varepsilon} \\ \rho\sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\varepsilon\rho}{(1-\rho^2)(1-c^2\rho^2)} [1\ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1-(1-\varepsilon)\rho^2 & -\varepsilon\rho^2 \\ -\varepsilon\rho^2 & 1-(1-\varepsilon)\rho^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2\varepsilon\rho}{1-c^2\rho^2} = \frac{2\varepsilon \cdot e^{i\theta}}{1-c^2 e^{2i\theta}}$$

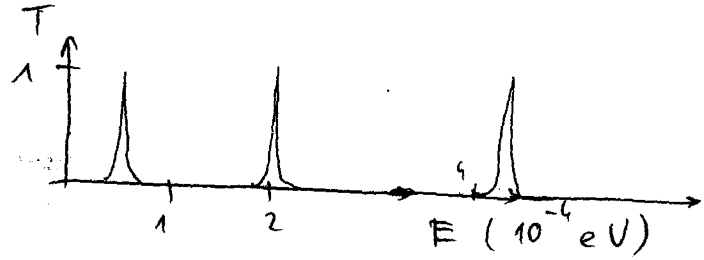
$$\Rightarrow T = |t|^2 = \frac{4\varepsilon^2}{1-2c^2\cos 2\theta + c^4}$$

Mennyi, $\theta = ?$ $\quad \rho = e^{i\theta}$ a transzmisszió az egyes ágakon (alsó, felső)

$\rho = e^{ik \cdot L}$, ahol L az ívhossz. $L = R\pi$, R sugarú gyűrűnél.

$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ az E energián bejövő egyetlen módus k hullámszáma. Így $\rho = e^{ikL} \Rightarrow$

$$\theta = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \cdot R\pi$$ a fázis szög a félkör megtétele során.



$R = 1000\,\text{Å}$

$\varepsilon = 0{,}025$

<u>Mágneses tér a gyűrűben:</u>

$$t_F \Rightarrow t_F \cdot e^{i\frac{e}{\hbar}\int_{\text{felső}} \underline{A}\cdot d\underline{s}} = t_F e^{i\varphi_F} \qquad t_F' \Rightarrow t_F' \cdot e^{-i\frac{e}{\hbar}\int_{\text{felső}} \underline{A}\, d\underline{s}} = t_F' e^{-i\varphi_F}$$

$$t_A \Rightarrow t_A \cdot e^{i\frac{e}{\hbar}\int_{\text{alsó}} \underline{A}\cdot d\underline{s}} = t_A e^{i\varphi_A} \qquad t_A' \Rightarrow t_A'\, e^{-i\frac{e}{\hbar}\int_{\text{alsó}} \underline{A}\, d\underline{s}} = t_A' e^{-i\varphi_A}$$

Végig lehet számolni ezekkel az új t-kel.
Kiderül hogy a $\varphi_F - \varphi_A$ jön be.
Meg lehet ezt érteni a Feynmann Path-al is.
Két hullám interferál (felső és alsón áthaladó):

$$T(n \leftarrow m) = |t_1 + t_2|^2$$

ahol $t_1 = \sum_{\substack{\text{all Path}\\ \text{a felső}}} A_p$, $t_2 = \sum_{\substack{\text{all Path}\\ \text{az alsó}}} A_p$

$$T = |t_1+t_2|^2 = |t_1|^2 + |t_2|^2 + t_1 t_2\, e^{i\varphi_1} e^{-i\varphi_2} + t_1 t_2\, e^{-i\varphi_1} e^{i\varphi_2} =$$

$$= T_1 + T_2 + 2\sqrt{T_1 T_2}\cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

De $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{e}{\hbar} \oint \underline{A}\, d\underline{s} = \frac{e}{\hbar}\cdot \phi$ → fluxus a ringen
$= 2\pi \cdot \frac{\phi}{\phi_0}$, $\phi_0 = \frac{h}{e}$

Így $T = T_1 + T_2 + 2\sqrt{T_1 T_2}\, \cos\left(2\pi \frac{\phi}{\phi_0} + \varphi\right)$ → energia függő.

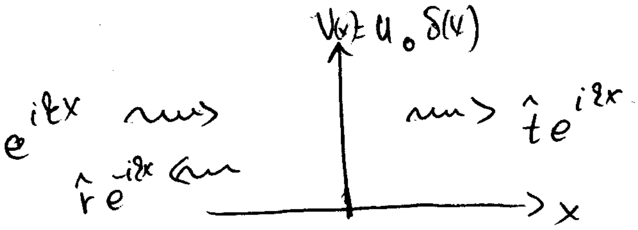
$\frac{h}{e}$ oszcilláció a $|\underline{B}|$ függvényében.

<u>Megj:</u> Többszörös „pattogás" a két végpont közt, mondjuk N-szer. Ekkor $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi N \frac{\phi}{\phi_0}$ ⇒ oszcilláció $\phi = \frac{h}{e}\cdot\frac{1}{N}$ ~~értékeknél~~
magasabb harmonikusok.

Kisérletileg nehéz mérni, mert $\frac{h}{e}\frac{1}{N}$ effektussal
a megtett út $NL = N \cdot R\pi$ során az elektron amplitudója:

e^{-2NL/L_φ} lesz, azaz egyre csökken N növelésével.

Dirac-delta szórás-mátrixa, egydimenzió:



$$\psi(x)=\begin{cases} e^{ikx}+\hat{r}\,e^{-ikx}, & x<0 \\ \hat{t}\,e^{ikx}, & x>0 \end{cases}$$

Csak egy módus van. $\Rightarrow$ $\hat{r}=r$ és $\hat{t}=t$ és skalárok.

$$\psi|_- = \psi|_+ \qquad \text{folyt.}$$

$$\psi'|_+ - \psi'|_- = \frac{2mU_0}{\hbar^2}\,\psi(0) \qquad \rightarrow \text{gradiens.}$$

dimenzió $[U_0] = m \cdot J$ $\leftarrow$ hossz $\times$ energia

$V(x)=U_0\delta(x) \Longrightarrow \int V(x)\,dx = U_0$ (V: energia, dx: hossz)

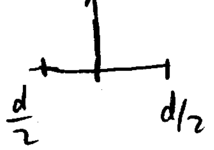
Legyen $\lambda^{2\,\to ?} = \dfrac{2mU_0}{\hbar^2}$ $\Rightarrow$ $[\lambda]=\dfrac{1}{\text{hossz}}$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 1+r &= t \\ ikt - [ik + (-ik)r] &= \lambda(1+r) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$r = \frac{-i\frac{\lambda}{2}}{k+i\frac{\lambda}{2}} \quad \text{és} \quad t = \frac{k}{k+i\frac{\lambda}{2}}$$

Szimmetria $\Rightarrow$ $r'=r$ és $t'=t$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{S}}_\delta = \frac{1}{k+i\frac{\lambda}{2}}\begin{bmatrix} -i\frac{\lambda}{2} & k \\ k & -i\frac{\lambda}{2}\end{bmatrix}} \qquad \text{és unitér}$$



$$S_{\text{üres}} = \begin{pmatrix} 0 & e^{ikd/2} \\ e^{ikd/2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}_{\text{üres}} \oplus \underline{\underline{S}}_\delta \oplus \underline{\underline{S}}_{\text{üres}} =$$

$$\boxed{\underline{\underline{S}} = \frac{e^{ikd}}{k+i\frac{\lambda}{2}}\begin{bmatrix} -i\frac{\lambda}{2} & k \\ k & -i\frac{\lambda}{2}\end{bmatrix}} \qquad \text{És unitér}$$

Kiszámoljuk az $\underline{\underline{M}}$ - mátrixot: ← Lásd (24c) oldalt!

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} \left(1 - i\frac{\lambda}{2k}\right)e^{ikd} & -i\frac{\lambda}{2k} \\ +i\frac{\lambda}{2k} & \left(1+i\frac{\lambda}{2k}\right)e^{-ikd} \end{bmatrix}$$

Sajátértékei:

$$\begin{vmatrix} M_{11}-\lambda & M_{12} \\ M_{21} & M_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 - \mathrm{Tr}\,\underline{\underline{M}}\,\lambda + \det \underline{\underline{M}} = 0$$

De egy módus esetén $\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t^*} & -\frac{r^*}{t^*} \\ -\frac{r}{t} & \frac{1}{t} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \det \underline{\underline{M}} = \frac{1}{|t|^2} - \frac{|r|^2}{|t|^2} = 1$$

Így $\quad \lambda^2 - \mathrm{Tr}\,\underline{\underline{M}}\,\lambda + 1 = 0$

Ezt az egyenletet kielégíti az $\underline{\underline{M}}$ is $\Rightarrow$

$$\underline{\underline{M}}^2 - \mathrm{Tr}\,\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{M}} + 1 = 0$$

Innen kiszámolható $\underline{\underline{M}}^N$ iterációval: → véges sok periodikus δ-k.

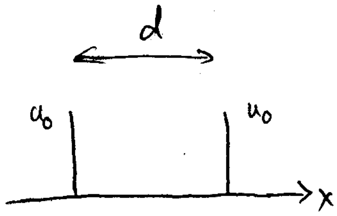
$$\underline{\underline{M}}^N = \frac{1}{\sin\phi}\left[\underline{\underline{M}}\sin N\phi - \underline{1}\sin(N-1)\phi\right]$$

ahol $\cos\phi = \mathrm{Re}\,M_{11} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{M}}$

A mi esetünkben: $\quad \mathrm{Tr}\,\underline{\underline{M}} = 2\cos kd + 2\frac{\lambda}{2k}\sin kd$

Így: $\quad \cos\phi = \cos kd + \frac{\lambda}{2k}\sin kd$

Egydimenzió



$$U(x) = U_0\left[\delta(x) + \delta(x-d)\right]$$

$$T(E) = \frac{T_1^2}{1 - 2R_1\cos\Theta + R_1^2} \text{, ahol}$$

$$T_1 = \frac{\hbar^2 v^2}{\hbar^2 v^2 + U_0^2}, \quad R_1 = \frac{U_0^2}{\hbar^2 v^2 + U_0^2}, \quad v = \frac{\hbar k}{m}, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\Theta = 2\left[kd + \mathrm{arctg}\,\frac{\hbar v}{U_0}\right]$$

$U_0 = 9\,eV\,Å$

$d = 50\,Å$

Bizonyításhoz lásd Soros-kapcsolás

$$T = \frac{T_1 T_2}{1 - 2\sqrt{R_1R_2}\cos\Theta + R_1R_2}$$

de kijön a $\underline{\underline{M}}$ transzfer mátrixokból is.

```
> with(plots):
> meff:=0.067:U0:=9:d:=50:ens:=7.62:
> c:=U0*meff*d/ens;
```

$$c := 3.956692913$$

```
> T1:=1/(1+c^2/k^2):R1:=c^2/k^2/(1+c^2/k^2);
```

$$R1 := \frac{15.65541881}{k^2\,(1 + \frac{15.65541881}{k^2})}$$

```
> theta:=2*(k+arctan(k/c));
```

$$\theta := 2\,k + 2\arctan(.2527363184\,k)$$

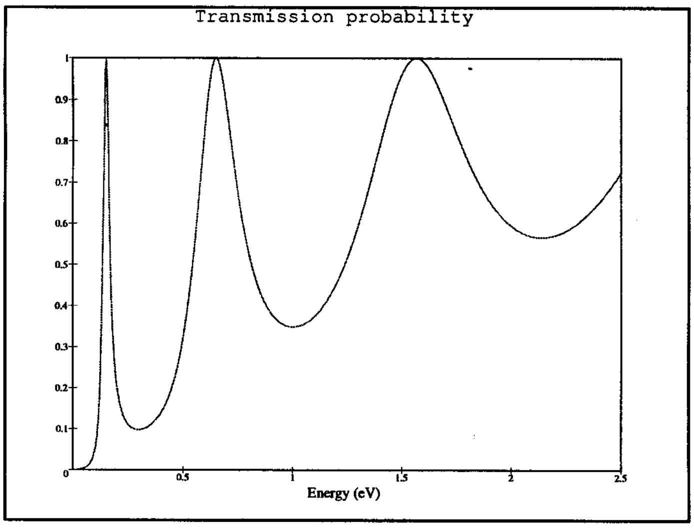
```
> T:=k-> T1^2/(1-2*R1*cos(theta)+R1^2);
```

$$T := k \to \frac{T1^2}{1 - 2\,R1\cos(\theta) + R1^2}$$

```
> a:=d*sqrt(2*meff/ens):k:=a*sqrt(E);
```

$$k := 6.630479215\,\sqrt{E}$$

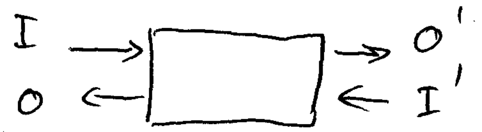
```
> plot(T(E),E=0..2.5,view=[0..2.5,0..1], xtickmarks=5,ytickmarks=10,axes=BOXED,\
numpoints=200,labels=['Energy (eV)',''],labelfont=[TIMES,ROMAN,15],\
axesfont=[TIMES,ROMAN,10],title=' Transmission probability');
```



Transzfer-mátrix:

Time-reversal symmetry ⇒

$$(t')^{T} = t \quad (T \to \text{transzponált.})$$



$$\begin{pmatrix} O \\ O' \end{pmatrix} = \underline{\underline{S}} \cdot \begin{pmatrix} I \\ I' \end{pmatrix} \quad \to \quad \underline{\underline{S}}\text{-mátrix}, \quad \underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} r & t' \\ t & r' \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} O' \\ I' \end{pmatrix} = \underline{\underline{M}} \cdot \begin{pmatrix} I \\ O \end{pmatrix} \quad \to \quad \text{transzfer-mátrix}$$

Kapcsolat van $\underline{\underline{S}}$ és $\underline{\underline{M}}$ között:

$$\begin{aligned} O &= rI + t'I' \\ O' &= tI + r'I' \end{aligned} \qquad \text{és} \qquad \begin{aligned} O' &= M_{11} I + M_{12} O \\ I' &= M_{21} I + M_{22} O \end{aligned}$$

$$I' = t'^{-1} O - t'^{-1} r I$$

$$O' = \underset{M_{11}}{tI} + r'(t'^{-1} O - \underset{M_{11}}{t'^{-1} r I})$$

$$\Rightarrow \quad M_{11} = t - r'(t')^{-1} r$$

Hasonlóan a többi és végül:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} t - r'(t')^{-1} r & r'(t')^{-1} \\ -(t')^{-1} r & (t')^{-1} \end{bmatrix}$$

Mivel $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{S}}^{+} = 1 \Rightarrow r t^{+} = -t'(r')^{+} \Rightarrow (t')^{-1} = -(r')^{+}(t^{+})^{-1} r^{-1}$

így $M_{11} = t - r'(t')^{-1} r = t + r'(r')^{+}(t^{+})^{-1} \underbrace{r^{-1} r}_{=1} =$

$= t + r'(r')^{+}(t^{+})^{-1} = \ldots = (t^{+})^{-1}$

de $1 = tt^{+} + r'(r')^{+}$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} (t^+)^{-1} & r'(t')^{-1} \\ -(t')^{-1} r & (t')^{-1} \end{bmatrix}$$

Hasonlóan $\quad \underline{\underline{M}} \Rightarrow \underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} r & t' \\ t & r' \end{bmatrix}$.

$$\boxed{\begin{aligned} r &= -M_{22}^{-1} M_{21} \\ t &= M_{11} - M_{12} M_{22}^{-1} M_{21} = (M_{11}^{+})^{-1} \\ r' &= M_{12} M_{22}^{-1} \\ t' &= M_{22}^{-1} \end{aligned}}$$

Egy módus esetén:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t^*} & \frac{r'}{t} \\ -\frac{r}{t} & \frac{1}{t} \end{bmatrix}$$

, ahol r, t skalárok.

és [illegible]

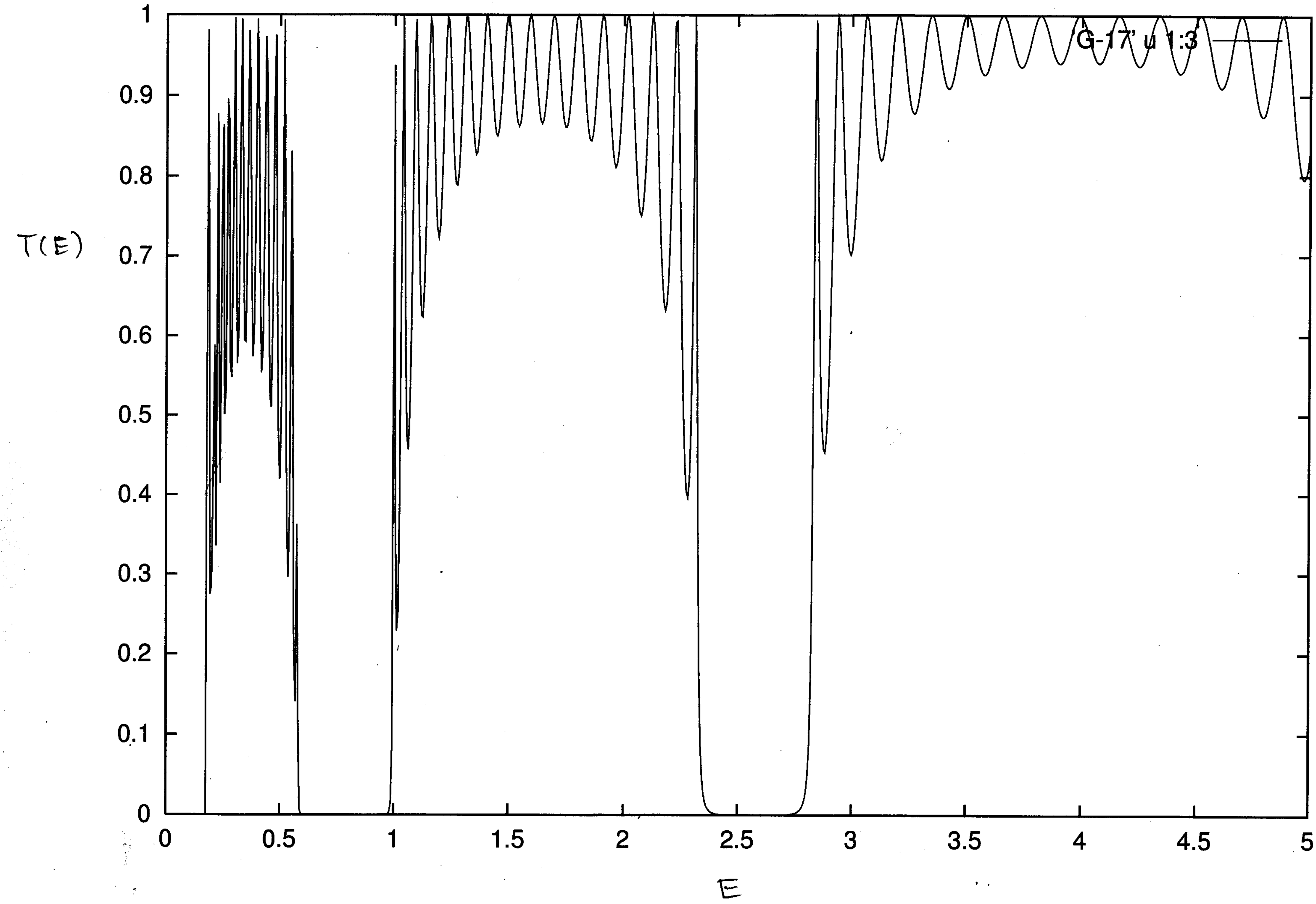
$t = t' \Rightarrow$

unitaritás $\Rightarrow \; t r'^* = -r t'^* = -r t^*$

$$\frac{r'^*}{t^*} \Rightarrow \frac{r'^*}{t^*} = -\frac{r}{t}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t^*} & -\frac{r^*}{t^*} \\ -\frac{r}{t} & \frac{1}{t} \end{bmatrix}$$

17db Dirac-delta együttástól $d=4.1$ távolságra.



The matrix ϱ is M_L by M_R, where $M_\mathrm{L} = \mathrm{Int}\left[\frac{k_\mathrm{F} W_\mathrm{L}}{\pi}\right]$ and $M_\mathrm{R} = \mathrm{Int}\left[\frac{k_\mathrm{F} W_\mathrm{R}}{\pi}\right]$ are the open channels in the left and right lead (here Int [x] stands for the integer part of x). Thus, in general, ϱ is a rectangular matrix. However, P and Q are square matrices.

$$\frac{2\sqrt{\frac{W_\mathrm{L}}{W_\mathrm{R}}}}{\pi} \frac{m \sin\left(\frac{j\pi h}{W_\mathrm{R}}\right) + j\,(-1)^j \frac{W_\mathrm{L}}{W_\mathrm{R}} \sin\left[\frac{m\pi}{W_\mathrm{L}}\left(W_\mathrm{R} - h\right)\right]}{m^2 - j^2 \frac{W_\mathrm{L}^2}{W_\mathrm{R}^2}} \tag{43}$$

2 Combining two scattering matrices

$$S_1 = \begin{pmatrix} r_1 & t_1' \\ t_1 & r_1' \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad S_2 = \begin{pmatrix} r_2 & t_2' \\ t_2 & r_2' \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Then

$$S = S_1 \otimes S_2 = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix}, \quad \text{where} \tag{45}$$

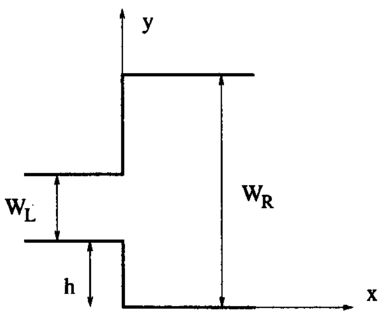
$$r = r_1 + t_1' r_2 \left(1 - r_1' r_2\right)^{-1} t_1, \tag{46}$$

$$t = t_2 \left(1 - r_1' r_2\right)^{-1} t_1, \tag{47}$$

$$r' = r_2' + t_2 \left(1 - r_1' r_2\right)^{-1} r_1' t_2', \tag{48}$$

$$t' = t_1' \left(1 - r_2 r_1'\right)^{-1} t_2'. \tag{49}$$

1 Scattering matrix for constriction



The wave functions satisfy the Helmholtz equation

$$\left(\nabla^2 + k_\mathrm{F}^2\right) \Psi(x,y) = 0. \tag{1}$$

The wave functions on the left/right hand sides are

$$\Psi_\mathrm{L}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{k_p^{(\mathrm{L})}}} e^{ik_p^{(\mathrm{L})}x} \chi_p^{(\mathrm{L})}(y) + \sum_j r_{jp} \frac{1}{\sqrt{k_j^{(\mathrm{L})}}} e^{-ik_j^{(\mathrm{L})}x} \chi_j^{(\mathrm{L})}(y), \tag{2}$$

$$\Psi_\mathrm{R}(x,y) = \sum_j t_{jp} \frac{1}{\sqrt{k_j^{(\mathrm{R})}}} e^{ik_j^{(\mathrm{R})}x} \chi_j^{(\mathrm{R})}(y), \quad \text{where} \tag{3}$$

$$k_n^{(\mathrm{L})} = k_\mathrm{F} \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi}{k_\mathrm{F} W_\mathrm{L}}\right)^2}, \tag{4}$$

$$k_n^{(\mathrm{R})} = k_\mathrm{F} \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi}{k_\mathrm{F} W_\mathrm{R}}\right)^2}, \tag{5}$$

$$\chi_n^{(\mathrm{L})}(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{W_\mathrm{L}}} \sin\left(\frac{n\pi}{W_\mathrm{L}}\,(y-h)\right), & \text{if } h < y < W_\mathrm{L} + \ell, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{6}$$

$$\chi_n^{(\mathrm{R})}(y) = \sqrt{\frac{2}{W_\mathrm{R}}} \sin\left(\frac{n\pi}{W_\mathrm{R}}\,y\right), \tag{7}$$

For simplicity, we assumed that $W_\mathrm{L} < W_\mathrm{R}$. Note that $\chi_n^{(\mathrm{L})}$ and $\chi_n^{(\mathrm{R})}$ are orthonormalt basis. The boundary conditions are

$$\Psi_\mathrm{L}\Big|_{x=0} = \Psi_\mathrm{R}\Big|_{x=0}, \tag{8}$$

$$\frac{d\Psi_\mathrm{L}}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{d\Psi_\mathrm{R}}{dx}\Big|_{x=0}. \tag{9}$$

Substituting the above wave functions into the equations of the boundary conditions, we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{k_p^{(\mathrm{L})}}}\chi_p^{(\mathrm{L})}(y) + \sum_j r_{jp}\frac{1}{\sqrt{k_j^{(\mathrm{L})}}}\chi_j^{(\mathrm{L})}(y), &= \sum_j t_{jp}\frac{1}{\sqrt{k_j^{(\mathrm{R})}}}\chi_j^{(\mathrm{R})}(y), & (10)\\ i\sqrt{k_p^{(\mathrm{L})}}\chi_p^{(\mathrm{L})}(y) - i\sum_j r_{jp}\sqrt{k_j^{(\mathrm{L})}}\chi_j^{(\mathrm{L})}(y), &= i\sum_j t_{jp}\sqrt{k_j^{(\mathrm{R})}}\chi_j^{(\mathrm{R})}(y). & (11)\end{aligned}$$

Multiplying both sides of the above equations from left by $\left[\chi_m^{(\mathrm{L})}(y)\right]^*$ and integrating over y from h to W_L (this is the interval, where $\chi_n^{(\mathrm{L})}$ are nonzero), we obtain

$$\begin{aligned} \delta_{mp} + r_{mp} &= \sum_j \sqrt{\frac{k_m^{(\mathrm{L})}}{k_j^{(\mathrm{R})}}}\,\langle\chi_m^{(\mathrm{L})}|\chi_j^{(\mathrm{R})}\rangle\, t_{jp}, & (12)\\ \delta_{mp} - r_{mp} &= \sum_j \sqrt{\frac{k_j^{(\mathrm{R})}}{k_m^{(\mathrm{L})}}}\,\langle\chi_m^{(\mathrm{L})}|\chi_j^{(\mathrm{R})}\rangle\, t_{jp}, \quad \text{where} & (13)\\ \langle\chi_m^{(\mathrm{L})}|\chi_j^{(\mathrm{R})}\rangle &= \int_h^{W_\mathrm{L}+h}\left[\chi_m^{(\mathrm{L})}(y)\right]^*\chi_j^{(\mathrm{R})}(y)\,dy. & (14)\end{aligned}$$

$W_L + h$

We now introduce the following overlap integral:

$$\varrho_{mj} = \sqrt{\frac{k_m^{(\mathrm{L})}}{k_j^{(\mathrm{R})}}}\,\langle\chi_m^{(\mathrm{L})}|\chi_j^{(\mathrm{R})}\rangle, \tag{15}$$

Then,

$$\begin{aligned} 1 + r &= \varrho t, & (16)\\ 1 - r &= \sum_j \sqrt{\frac{k_j^{(\mathrm{R})}}{k_m^{(\mathrm{L})}}}\,\langle\chi_m^{(\mathrm{L})}|\chi_j^{(\mathrm{R})}\rangle\, t_{jp}, & (17)\end{aligned}$$

Adding the two equations and multiplying the resulting equation by ϱ^+, where the sign $+$ stands for the transposition and conjugation.

$$2\varrho^+ = \varrho^+\varrho\, t + \sum_{m,j}\sqrt{\frac{k_m^{(\mathrm{L})}}{k_l^{(\mathrm{R})}}}\sqrt{\frac{k_j^{(\mathrm{R})}}{k_m^{(\mathrm{L})}}}\,\langle\chi_l^{(\mathrm{R})}|\chi_m^{(\mathrm{L})}\rangle\,\langle\chi_m^{(\mathrm{L})}|\chi_j^{(\mathrm{R})}\rangle\, t_{jp}. \tag{18}$$

The summation over m gives the unit matrix and then the summation over j results in the matrix t, i.e.,

$$2\varrho^+ = \varrho^+\varrho\, t + t, \tag{19}$$

from which we find

$$t = 2\left(1 + \varrho^+\varrho\right)^{-1}\varrho^+. \tag{20}$$

Then,

$$r = \varrho t - 1 = 2\varrho\left(1 + \varrho^+\varrho\right)^{-1}\varrho^+ - 1. \tag{21}$$

We now prove the following identity:

$$\left(1 + \varrho^+\varrho\right)^{-1}\varrho^+ = \varrho^+\left(1 + \varrho\varrho^+\right)^{-1}. \tag{22}$$

$2\varrho^+ = \varrho^+\varrho\, t + K\, t$

Starting from the left hand side we have

$$\begin{aligned} \left(1 + \varrho^+\varrho\right)^{-1}\varrho^+ &= \left[\varrho^+\left(\varrho^{+^{-1}} + \varrho\right)\right]^{-1}\varrho^+ = \left(\varrho^{+^{-1}} + \varrho\right)^{-1} & (23)\\ &= \left[\left(1 + \varrho\varrho^+\right)\varrho^{+^{-1}}\right]^{-1} = \varrho^+\left(1 + \varrho\varrho^+\right)^{-1}. & (24)\end{aligned}$$

Thus, the matrix r becomes

$$\begin{aligned} r &= 2\varrho\left(1 + \varrho^+\varrho\right)^{-1}\varrho^+ - 1 = 2\varrho\,\varrho^+\left(1 + \varrho\varrho^+\right)^{-1} - 1 & (25)\\ &= 2\varrho\,\varrho^+\left(1 + \varrho\varrho^+\right)^{-1} - \left(1 + \varrho\varrho^+\right)\left(1 + \varrho\varrho^+\right)^{-1} & (26)\\ &= \left(2\varrho\,\varrho^+ - 1 - \varrho\,\varrho^+\right)\left(1 + \varrho\varrho^+\right)^{-1} = \left(\varrho\,\varrho^+ - 1\right)\left(1 + \varrho\varrho^+\right)^{-1}. & (27)\end{aligned}$$

The scattering matrices for wave function incoming from the right side can be obtained with similar calculations and we find

$$\begin{aligned} r' &= \left(1 + \varrho^+\varrho\right)^{-1}\left(1 - \varrho^+\varrho\right), & (28)\\ t' &= t^+ = 2\varrho\left(1 + \varrho^+\varrho\right)^{-1}. & (29)\end{aligned}$$

In summary, the full scattering matrix becomes

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix}, \quad \text{where} & (30)\\ r &= (P - 1)\,(1 + P)^{-1}, & (31)\\ t &= 2\varrho^+\,(1 + P)^{-1}, & (32)\\ t' &= 2\varrho\,(1 + Q)^{-1}, & (33)\\ r' &= (1 - Q)\,(1 + Q)^{-1}, & (34)\\ P &= \varrho\varrho^+, & (35)\\ Q &= \varrho^+\varrho, & (36)\\ \varrho_{mj} &= \sqrt{\frac{k_m^{(\mathrm{L})}}{k_j^{(\mathrm{R})}}}\,\langle\chi_m^{(\mathrm{L})}|\chi_j^{(\mathrm{R})}\rangle = \sqrt{\frac{k_m^{(\mathrm{L})}}{k_j^{(\mathrm{R})}}}\int_h^{W_\mathrm{L}}\left[\chi_m^{(\mathrm{L})}(y)\right]^*\chi_j^{(\mathrm{R})}(y)\,dy, & (37)\\ & & (38)\end{aligned}$$

$+ h$

Finally, some useful identities:

$$\begin{aligned} \varrho^+\,(1 + P)^{-1} &= (1 + Q)^{-1}\,\varrho^+, & (39)\\ \varrho\,(1 + P)^{-1} &= (1 + Q)^{-1}\,\varrho, & (40)\\ P^+ &= P, & (41)\\ Q^+ &= Q. & (42)\end{aligned}$$

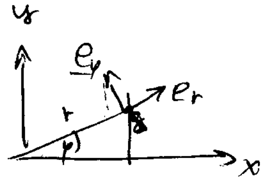
$\frac{1}{m}\frac{1}{\sqrt{u}}$ $[C]=\sqrt{u}$

$$2ik_m^{(p)}\delta_{mp} = \sum_j \left[ik_m^{(1)}\langle\chi_m^{(1)}|\phi_j^{(1)}\rangle + \langle\chi_m^{(1)}|\frac{\partial\phi_j^{(1)}}{\partial n}\rangle\right]c_j$$

$$0 = \sum_j \left[ik_m^{(2)}\langle\chi_m^{(2)}|\phi_j^{(2)}\rangle - \langle\chi_m^{(2)}|\frac{\partial\phi_j^{(2)}}{\partial n}\rangle\right]c_j$$

$$2ik_m^{(p)}\delta_{mp} = \sum_j A_{mj}c_j$$

$$0 = \sum_j B_{mj}c_j$$

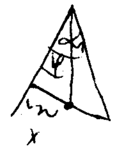


$$A_{mj} = ik_m^{(1)}\langle\chi_m^{(1)}|\phi_j\rangle + \langle\chi_m^{(1)}|\frac{\partial\phi_j}{\partial n}\rangle =$$

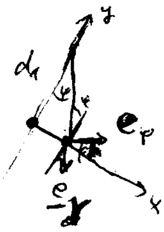
$$= \sqrt{\frac{2}{a}}\int_0^a dx\,\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\left[\phi_j(x,0)\,ik_m^{(1)} + \frac{\partial\phi_j}{\partial n}\Big|_{x,y=0}\right]$$

$$\phi_j^{(1)}(x,y) = J_{\nu_j}(kr)\cdot\sin\nu_j\varphi - \frac{J_{\nu_j}(kd)\sin(\nu_j\alpha_1)}{J_{\nu_{j+1}}(kd)\sin(\nu_{j+1}\alpha_1)}\cdot J_{\nu_{j+1}}(kr)\sin(\nu_{j+1}\varphi)$$

$$\nu_j = \frac{j\pi}{\alpha_1+\alpha_2}$$



$$\phi_j^{(1)}(x,0) = \phi_j^{(1)}\Big(r=\underbrace{\ldots}_{\frac{d_1}{\cos\varphi}},\varphi\Big),\quad x = d_1\,\mathrm{tg}\,\varphi$$



$$\boxed{\frac{\partial\phi_j}{\partial n}} = -\frac{\partial\phi_j^{(1)}}{\partial r}\cdot\cos\varphi + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\phi_j^{(1)}}{\partial\varphi}\cdot\sin\varphi =$$

$$= \left(-\frac{\partial J_{\nu_j}(kr)}{\partial r}\sin\nu_j\varphi + A_j\frac{\partial J_{\nu_{j+1}}(kr)}{\partial r}\cdot\sin\nu_{j+1}\varphi\right)\cos\varphi +$$

$$+\frac{1}{r}\cdot\left[\nu_j J_{\nu_j}(kr)\cos\nu_j\varphi - A_j J_{\nu_{j+1}}(kr)\cdot\nu_{j+1}\cos\nu_{j+1}\varphi\right]\cdot\sin\varphi$$

$$A_j = \frac{J_{\nu_j}(kd)\sin(\nu_j\alpha_1)}{J_{\nu_{j+1}}(kd)\sin(\nu_{j+1}\alpha_1)}$$

$$A_{mj} = \sqrt{\frac{2}{a}}\int_0^a dx\,\sin\frac{m\pi}{a}x\left[\left(J_{\nu_j}(kr)\sin\nu_j\varphi - A_j J_{\nu_{j+1}}(kr)\sin\nu_{j+1}\varphi\right)ik_m^{(1)} + \left(-\frac{\partial J_{\nu_j}(kr)}{\partial r}\sin\nu_j\varphi + A_j\frac{\partial J_{\nu_{j+1}}(kr)}{\partial r}\sin\nu_{j+1}\varphi\right)\cos\varphi\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r}\left(\nu_j J_{\nu_j}(kr)\cos\nu_j\varphi - A_j J_{\nu_{j+1}}(kr)\nu_{j+1}\cos\nu_{j+1}\varphi\right)\sin\varphi\right]$$

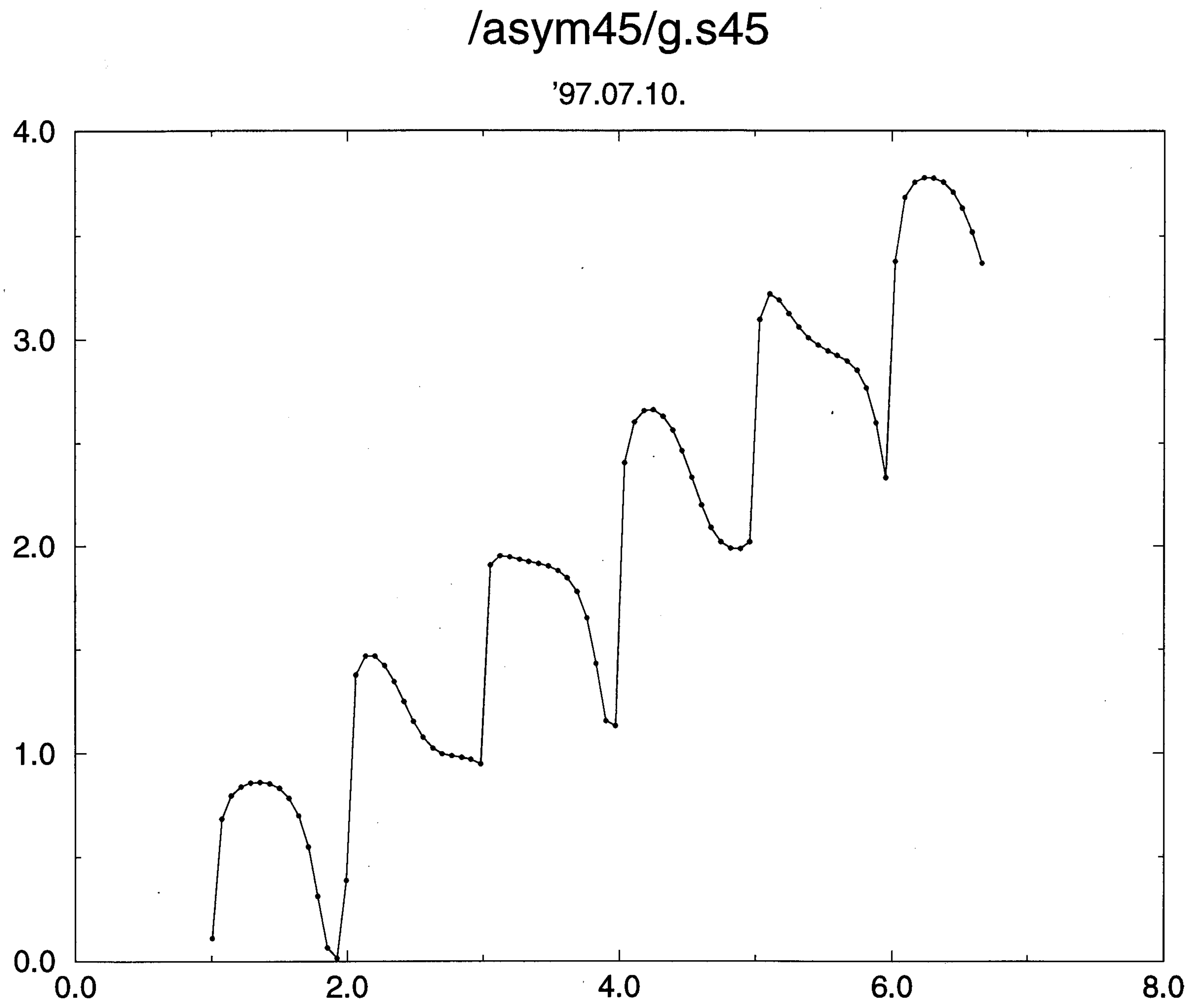
$$kr_s = k\cdot\sqrt{x^2+d_s^2} = kd\sqrt{\left(\frac{x}{d}\right)^2+\cos^2\alpha_s} =$$
$$= z\cdot\pi\sqrt{\tilde{x}^2+\cos^2\alpha_s}$$

$x\in[0, d\sin\alpha_1]$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{\tilde{x}}{\cos\alpha_s}$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{x}{d_1} \Rightarrow \frac{\tilde{x}d}{d\cos\alpha_1}\quad \frac{1}{r} = \frac{\cos\varphi}{d_1} = \frac{\cos\varphi}{d\cos\alpha_1}\cdot\sin\varphi = \frac{1}{2d}\frac{\sin 2\varphi}{\cos\alpha_1}$$

$$z = \frac{kd}{\pi}$$


/asym45/g.s45
'97.07.10.
4.0
3.0
2.0
1.0
0.0
0.0
2.0
4.0
6.0
8.0

Green-függvény:

$$[E - H(\underline{r})]\, G(\underline{r}, \underline{r}', E) = \delta(\underline{r} - \underline{r}')$$

+ hat. felt. (pl. Dirichlet vagy Neumann)

Legyen $H(\underline{r})\,\phi_n(\underline{r}) = E_n \phi_n(\underline{r})$ sajátérték egyenlet

$$\int \phi_n^*(r)\,\phi_m(r)\,dr = \delta_{nm}$$

és $\sum_n \phi_n(r)\,\phi_n^*(r') = \delta(\underline{r} - \underline{r}')$

Jelölés:

$$\phi_n(r) = \langle \underline{r} | \phi_n \rangle$$

operátorok

$$\delta(\underline{r} - \underline{r}')\, H(\underline{r}) = \langle \underline{r} | H | \underline{r}' \rangle$$

$$G(\underline{r}, r', E) = \langle \underline{r} | G(E) | \underline{r}' \rangle$$

$$\langle \underline{r} | \underline{r}' \rangle = \delta(\underline{r} - \underline{r}')$$

$$\int dr\, |\underline{r}\rangle\langle \underline{r}| = 1$$

Így $(E - H)\,G = 1$

$$H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle \quad , \langle \phi_n | \phi_m \rangle = \delta_{nm} \quad , \quad \sum_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n| = 1$$

És

$$\langle \underline{r} | (E - H)\, G | \underline{r}' \rangle = \langle \underline{r} | 1 | \underline{r}' \rangle = \underline{\delta(\underline{r} - \underline{r}')}$$

$$\parallel$$

$$E\, G(r, r', E) - \int dr'' \underbrace{\langle r | H | r'' \rangle}_{\delta(r - r'')H(r)} \overset{\text{„bővítés"}}{} \underbrace{\langle r'' | G(E) | r' \rangle}_{G(r'', r', E)} =$$

$$= \underline{E\, G(\underline{r}, \underline{r}', E) - H(r)\, G(r, r', E)}$$

visszakaptuk a G kiinduló definícióját.

általános f fv.

$$F(H)|\phi_n\rangle = F(E_n)|\phi_n\rangle$$

$$G(E) = \frac{1}{E - H} \Rightarrow G(E) = \frac{1}{E - H}\sum_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n| = \sum_n \frac{|\phi_n\rangle\langle\phi_n|}{E - E_n}$$

$\underline{r}$ - reprezentációban:

$$\boxed{G(r, r', E) = \sum_n \frac{\phi_n(r)\,\phi_n^*(r')}{E - E_n}}$$

Perturbáció: $H = H_0 + H_1$

legyen $G_0 = (E - H_0)^{-1}$

és $G = (E-H)^{-1} = (E - H_0 - H_1)^{-1}$

$\Rightarrow \quad (\underbrace{E - H_0}_{G_0^{-1}} - H_1)\, G = 1 \quad \Rightarrow \quad G_0^{-1} G - H_1 G = 1$

$G - G_0 H_1 G = G_0$

$\Rightarrow \quad G = G_0 + G_0 H_1 G \qquad$ Dyson-egyenlet.

Iteráció: $\quad G = G_0 + G_0 H_1 G_0 + G_0 H_1 G_0 H_1 G_0 + \dots$

Retardált Green fv.: $\quad G^R = \dfrac{1}{E - H + i\eta}$

Green-függvény és az S mátrix kapcsolata:

Vizsgáljuk az üres cső Green-fv.

$A_m^- \leftarrow \qquad \bullet \qquad \rightarrow A_m^+$

$(E - H)\, G(x,y,x',y') = \delta(x-x')\delta(y-y') \rightarrow H$

$G(x,y,x',y') = \sum_m A_m^{\pm} \chi_m(y) \cdot e^{i k_m |x-x'|} \quad \Rightarrow \begin{cases} x > x', & A_m^+ \\ x < x', & A_m^- \end{cases}$

$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + U(y) \right] \chi_m(y) = \varepsilon_m \chi_m(y)$, $\int \chi_m(y) \chi_n^*(y) dy = \delta_{nm}$

$k_m = \dfrac{\sqrt{2m(E - \varepsilon_m)}}{\hbar}$

$G(x,x')\big|_{x = x'+0} = G(x,x')\big|_{x = x'-0}$

$\dfrac{\partial G(x,x')}{\partial x}\Big|_{x = x'+0} - \dfrac{\partial G(x,x')}{\partial x}\Big|_{x = x'-0} = \dfrac{2m}{\hbar^2} \delta(y-y')$

$\Downarrow$

$\int dy\, \chi_n^*(y) \,/ \qquad \sum_m A_m^+ \chi_m(y) = \sum_m A_m^- \chi_m(y)$

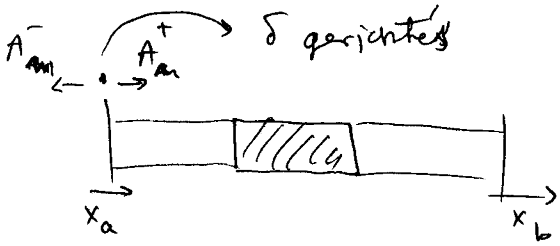
$\int dy\, \chi_n^*(y) \,/ \qquad \sum_m i k_m (A_m^+ + A_m^-) \chi_m(y) = \dfrac{2m}{\hbar^2} \delta(y-y')$

26

$$A_m^+ = A_m^- \quad \text{és} \quad i k_m (A_m^+ + A_m^-) = \frac{2m}{\hbar^2} \chi_m^*(y')$$

$$\Rightarrow \quad A_m^+ = A_m^- = -\frac{i}{\hbar v_m} \chi_m^*(y') \quad , \text{ahol } v_m = \frac{\hbar k_m}{m}$$

$$\text{és } k_m = \frac{\sqrt{2m(E-E_m)}}{\hbar}$$



$$G(x,y,x',y') = \sum_m -\frac{i}{\hbar v_m} e^{i k_m |x-x'|} \chi_m(y) \chi_m^*(y')$$

local koord.

$$G^R_{ba}(y_b, y_a) \equiv G^R_{ba}(y_b, x_b=0, y_a, x_a=0)$$

$$G_{ba}(y_b, y_a) = \sum_{m\in a} \sum_{n\in b} \left[\delta_{nm} \delta_{ab} A_m^- + \hat{S}_{nm} A_m^+ \right] \chi_n^{(b)}(y_b)$$

De az előbb láttuk, hogy távol (bal oldalt) a vezetőtől

$$A_m^- = A_m^+ = -\frac{i}{\hbar v_m} \chi_m^{(a)}(y_a)$$

$$\text{és} \quad S_{nm} = \hat{S}_{nm} \sqrt{\frac{k_n^{(b)}}{k_m^{(a)}}} \quad \rightarrow \text{Ezt korábban láttuk.}$$

$$\Rightarrow \quad G_{ba}(y_b, y_a) = \sum_{\substack{m\in a \\ n\in b}} -\frac{i}{\hbar \sqrt{v_m^{(a)} v_n^{(b)}}} \chi_m^{(a)} \chi_n^{(b)}(y_b) \left[\delta_{nm} + S_{nm} \right]$$

$$/ \int dy_a \, dy_b \, \chi_m^{(a)}(y_a) \chi_n^{(b)}(y_b)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S_{nm} = -\delta_{nm}^{\delta_{a,b}} + i\hbar \sqrt{v_n^{(b)} v_m^{(a)}} \iint \chi_n^{(b)}(y_b) \, G^R_{ba}(y_b, y_a) \chi_m^{(a)}(y_a) \, dy_a \, dy_b}$$

Fisher_Lee - reláció PRB, <u>23</u>, 6851 ('81)

<u>B</u> - tér : Baranger, Stone PRB, <u>40</u>, 8169 ('89)

Az elektron - elektron kölcsönhatás <u>nincs</u> bent!

el - el. kh. esetén célszerűbb a Kubo - formalizmusból kiindulni.

Üres cső:

$$G_0^R(\underline{r},\underline{r}',E) = \sum_m -\frac{i}{\hbar v_m^{(a)}} \chi_m^{*}(y_a)\chi_m(y_b)\cdot e^{ik_m|x-x'|}$$

$$r_{nm} = -\delta_{nm} + i\hbar\sqrt{v_n v_m}\cdot\int dy_a\, dy_b\, \chi_n(y_a)\chi_m(y_b)\sum_\ell\left(-\frac{i}{\hbar v_\ell}\right)\chi_\ell(y_a)\chi_\ell(y_b)\cdot \underbrace{e^{ik_\ell|x-x'|}}_{1}$$

$$\Rightarrow\ r_{nm} = 0 \qquad e^{ik_\ell|x-x'|} = 1 \text{ , mert } x=x'\ !$$

$$t_{nm} = i\hbar\sqrt{v_n^{(a)} v_m^{(a)}}\iint dy_a\, dy_b\, \chi_n(y_a)\chi_m(y_b)\sum_\ell -\frac{i}{\hbar v_\ell}\chi_\ell(y_a)\chi_\ell(y_b)e^{ik_\ell|x-x'|}$$

$$= \delta_{nm}\cdot e^{ik_m|x-x'|}$$, ahol $x-x'=L$ a minta hossza ...

Dirac-delta szennyezés: $\lambda\delta(x-x_\ell)$

$$H_1 = |\ell\rangle\lambda\langle\ell|$$

$$G = G_0 + G_0 H_1 G \quad\Rightarrow\quad G = G_0 + G_0 H_1 G_0 + G_0 H_1 G_0 H_1 G_0 + \dots$$

$$\Rightarrow\ G = G_0 + G_0|\ell\rangle\lambda\langle\ell|G_0 + G_0|\ell\rangle\lambda\langle\ell|G_0|\ell\rangle\lambda\langle\ell|G_0 + \dots$$

$$= G_0 + G_0|\ell\rangle\lambda\,(1 + \lambda\langle\ell|G_0|\ell\rangle + \lambda^2\langle\ell|G_0|\ell\rangle\langle\ell|G_0|\ell\rangle + \dots)\langle\ell|G_0 =$$

$$\langle\ell|G_0|\ell\rangle \longrightarrow G_0(\ell,\ell,E)$$

$$= \boxed{G_0 + \lambda\frac{G_0|\ell\rangle\langle\ell|G_0}{1-\lambda G_0(\ell,\ell,E)}} \Rightarrow \boxed{G(r,r',E) = G_0(r,r',E) + \lambda\frac{G_0(r,r_0)G_0(r_0,r')}{1-\lambda G_0(r_0,r_0)}}$$

r-repr.

Sok Dirac-delta esete: Iterációval.

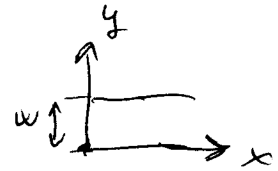
N-db Dirac-delta

$$G_N(r,r',E) = \frac{\begin{vmatrix} G_0(r,r',E) & G_0(r,a_1) & \dots & G_0(r,a_N) \\ G_0(a_1,r') & G_0(a_1,a_1)-\frac{1}{\lambda_1} & \dots & G_0(a_1,a_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_0(a_N,r') & G_0(a_N,a_1) & \dots & G_0(a_N,a_N)-\frac{1}{\lambda_N} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_0(a_1,a_1)-\frac{1}{\lambda_1} & \dots & G_0(a_1,a_N) \\ \vdots & & \vdots \\ G_0(a_N,a_1) & \dots & G_0(a_N,a_N)-\frac{1}{\lambda_N} \end{vmatrix}}$$

Üres cső Green-fv.-nek más levezetése:

$$G^R(\underline{r},\underline{r}',E) = \sum_m \frac{\psi_m(\underline{r})\,\psi_m^*(\underline{r}')}{E - E_m + i\eta}\,, \quad \leftarrow \text{sajátfv. kifejtés alapján.}$$

ahol $\quad H\,\psi_m(\underline{r}) = E_m \psi(\underline{r})$



üres csőnél: $\quad H = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m}$

Ekkor $\quad \psi_{\underset{\uparrow}{n,k}}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{L}}\, e^{ikx} \cdot \chi_n(y)\,,$

$\qquad \chi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{w}}\, \sin \frac{n\pi}{w} y \quad$ és $\quad E_{n,k} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k^2 + \frac{n^2\pi^2}{w^2}\right)$

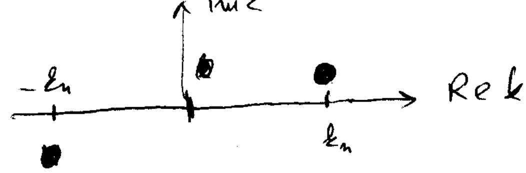
kv. indexek

Így $\quad G^R(x,y;x',y',E) = \frac{1}{L}\sum_{n,k} \frac{e^{ik(x-x')}\,\chi_n(y)\,\chi_n(y')}{E - E_{n,k} + i\eta}$

$$\sum_k \to \frac{L}{2\pi}\int dk$$

$$G^R(x,y;x',y') = \frac{1}{2\pi}\sum_n \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \frac{e^{ik(x-x')}}{E - \frac{\hbar^2}{2m}\left(k^2 + \frac{n^2\pi^2}{w^2}\right) + i\eta}\,\chi_n(y)\,\chi_n(y')$$

pólusok:



$$k_{1,2} = \pm k_n(1 + i\delta)\,, \quad \text{ahol} \quad k_n = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E - \frac{n^2\pi^2}{w^2}}$$

Tfh. $x - x' > 0$ ekkor felső félsíkon zárjuk a kontúrt.

$$G^R(x,y;x',y') = \frac{2\pi i}{2\pi}\sum_n \frac{e^{ik_n(x-x')}}{-\frac{\hbar^2}{2m}2k_n}\,\chi_n(y)\,\chi_n(y') = \sum_n \frac{-i}{\hbar v_n}\, e^{ik_n(x-x')}\,\chi_n(y)\,\chi_n(y')$$

ahol $\quad v_n = \frac{\hbar k_n}{m}$

./.

Ha $x-x'<0$, akkor az alsó félsíkon zárjuk a kontúrt. Ekkor a $k_2 = -k_n(1+i\delta)$ pólus számít.

Végül:

$$G^R(x,y;x',y') = \sum_n \frac{-i}{\hbar v_n} e^{ik_n|x-x'|} \chi_n(y) \chi_n(y')$$

ahogy azt a 26. oldalon már megkaptuk.

Megjegyzés

Egy db. Dirac-delta Green-fv.-e $\underline{r}$-képben:

$$G = G_0 + G_0 H_1 G$$

$$\langle r|G|r'\rangle = \langle r|G_0|r'\rangle + \iint \langle r|G_0|r_1\rangle \underbrace{\langle r_1|H_1|r_2\rangle}_{\delta(r_1-r_2)H_1(r_1)} \langle r_2|G|r'\rangle\, d^3r_1 d^3r_2$$

$$G(r,r') = G_0(r,r') + \iint G(r,r_1)\,\delta(r_1-r_2)\,H_1(r_1)\,G(r_2,r')\,d^3r_1\,d^3r_2 =$$

$$= G_0(r,r') + \int G_0(\underline{r},\underline{r}_1)\underbrace{H_1(r_1)}_{\lambda\delta(r_0,r_1)} G(r_1,r')\,d^3r_2 =$$

$$\boxed{G(r,r') = G_0(r,r') + \lambda G_0(r,r_0)\,G(r_0,r')}\,.$$

Legyen $r = r_0 \Rightarrow \quad G(r_0,r') = G_0(r_0,r') + \lambda G_0(r_0,r_0)\,G(r_0,r')$

$$\Rightarrow \quad G(r_0,r') = \frac{G_0(r_0,r')}{1-\lambda G_0(r_0,r_0)}$$

$$\Rightarrow \boxed{G(r,r') = G_0(r,r') + \lambda\,\frac{G_0(r,r_0)\,G_0(r_0,r')}{1-\lambda G_0(r_0,r_0)}}$$

Ezt kaptuk a sorösszegzésnél is, így az eredmény akkor is érvényes, ha sor nem konvergál (azaz, ha $\lambda G_0(r_0,r_0) > 1$).

Be lehet látni algebrai úton, sorösszegzés nélkül is a G-t.

$$G = [\underbrace{E - H_0}_{G_0^{-1} \equiv A} - \lambda|\ell\rangle\langle\ell|]^{-1}$$

Tétel: $[A + |x\rangle\langle y|]^{-1} = A^{-1} - \dfrac{A^{-1}|x\rangle\langle y|A^{-1}}{1+\langle y|A^{-1}|x\rangle}$

Bizonyítás: szorozzuk meg ezt jobbról $A + |x\rangle\langle y|$-nal. $\underline{\underline{1}}$-et kapunk.

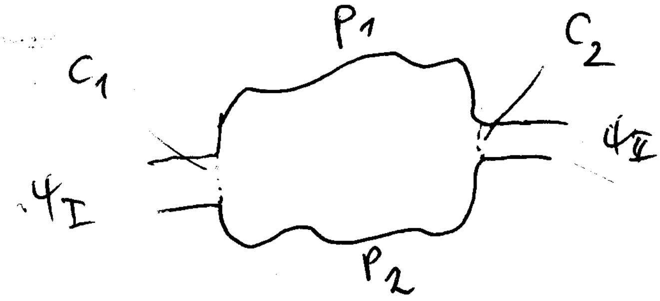
A tételt alkalmazva:

$$G = G_0 - \frac{-\lambda G_0|\ell\rangle\langle\ell|G_0}{1-\lambda\langle\ell|G_0|\ell\rangle} =$$

$$= G_0 + \frac{\lambda\, G_0|\ell\rangle\langle\ell|G_0}{1-\lambda\langle\ell|G_0|\ell\rangle}$$

Reichl: PRB $\underline{59}$, 8163 (199)

Boundary element method:



$$\partial D \overset{\nearrow \text{boundary}}{=} C_1 + C_2 + P_1 + P_2$$

Helmholtz-egyenlet:

$$(\nabla^2 + k_F^2)\psi(\underline{r}) = 0$$

$$\psi|_{hat} = 0$$

$$\psi_I = e^{i k_m^{(I)} x} \chi_m^{(I)}(y) + \sum_j \hat{r}_{jm} e^{-i k_j^{(I)} x} \chi_j^{(I)}(y)$$

$$\psi_{II} = \sum_j \hat{t}_{jm} e^{i k_j^{(II)} x} \cdot \chi_j^{(II)}(y)$$

A tartomány belsejében felveszünk egy bázist, mely kielégíti a Helmholtz-egyenletet:

$$(\nabla^2 + k_F^2)\,\phi_\ell(\underline{r}) = 0$$

, de nem tudja a hat. feltételt.

A C_1 és C_2-n a hat. feltétel:

$$\psi_I|_{C_1} = \psi|_{C_1}, \quad \psi_{II}|_{C_2} = \psi|_{C_2}, \quad \text{grad}\,\psi_I|_{C_1} = \text{grad}\,\psi|_{C_1}, \quad \text{grad}\,\psi_{II}|_{C_2} = \text{grad}\,\psi|_{C_2}$$

Helmholtz-egyenletekből:

$$\phi_\ell \nabla^2\psi + k_F^2 \phi_\ell \psi = 0 \quad \text{és} \quad \psi \nabla^2\phi_\ell + k_F^2 \phi_\ell \psi = 0,$$

kivonva a kettőt egymásból:

$$\psi \nabla^2\phi_\ell - \phi_\ell \nabla^2\psi = 0 \Rightarrow \text{div}(\psi\, \text{grad}\,\phi_\ell - \phi_\ell\, \text{grad}\,\psi) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\partial D} d\underline{s}\, (\psi\, \text{grad}\,\phi_\ell - \phi_\ell\, \text{grad}\,\psi) = 0}$$

→ Boundary integral. A hull. fv.-eket csak a ∂D határon kell ismerni.

Legyen P_1-n: $\xi_n^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{L_1}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{L_1} n\lambda}$ és

P_2-n: $\xi_n^{(2)}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{L_2}} e^{i\frac{2\pi}{L_1} n\lambda}$

Ezek a λ koordinátától, a P_1 ill. P_2 mentén vett hosszúságoktól függnek. Orthonormált bázis. Periodikus fv.-e λ-nak.

Ekkor $\text{grad}\,\psi|_{P_1}$ is periodikus fv.-e λ-nak a határon. Így

$$d\underline{s}\, \text{grad}\,\psi|_{P_1} = \sum_n c_n^{(1)} \xi_n^{(1)}(\lambda)\, d\lambda$$

és

$$d\underline{s}\, \text{grad}\,\psi|_{P_2} = \sum_n c_n^{(2)} \xi_n^{(2)}(\lambda)\, d\lambda$$

Felhasználva a $\int d\underline{s}\,(\psi\,\mathrm{grad}\,\phi_\ell - \phi_\ell\,\mathrm{grad}\,\psi) = 0$

$$\Rightarrow -\int_{P_1} d\lambda\,\phi_\ell \sum_n c_n^{(1)}\xi_n^{(1)}(\lambda) - \int_{P_2} d\lambda\,\phi_\ell \sum_n c_n^{(2)}\xi_n^{(2)}(\lambda) +$$

$$+ \int_{C_1}(\psi_I\,\mathrm{grad}\,\phi_\ell - \phi_\ell\,\mathrm{grad}\,\psi_I)\,ds + \int_{C_2}(\psi_{II}\,\mathrm{grad}\,\phi_\ell - \phi_\ell\,\mathrm{grad}\,\psi)\,ds = 0$$

Ez az egyenlet $\forall \ell$-re teljesül.

Ismeretlenek

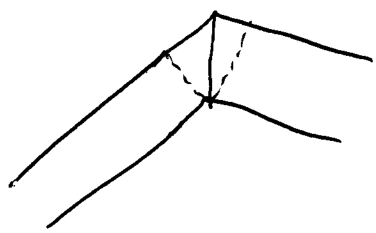
$$\underline{X} = \begin{pmatrix} r_{jm} \\ t_{jm} \\ c_j^{(1)} \\ c_j^{(2)} \end{pmatrix}$$

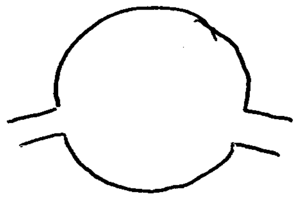
Ha ℓ index maximális értékét úgy választjuk, hogy megegyezzen az ismeretlenek számával,

akkor egy $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ típusú egyenletet kapunk $\underline{X}$-re.

$\Rightarrow$ $\hat{\underline{\underline{r}}}$ és $\hat{\underline{\underline{t}}}$ számolható és $c_j^{(1)}$, $c_j^{(2)}$ értékeit is megkaphatjuk.

Pl.





$$\phi_\ell = J_\ell(k_F r)\,e^{i\ell\varphi}$$

Green-fv. rácson

Egy dimenzió: $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + U(x)$

a j

$x = ja$

$$H\psi\big|_{x=ja} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}\Big|_{x=ja} + U_j\psi_j,$$

ahol $U_j = U(x=ja)$, $\psi_j = \psi(x=ja)$

közelítés: $\frac{d^2\psi}{dx^2}\Big|_{x=ja} \longrightarrow \frac{1}{a^2}\left(\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}\right)$

$$\Rightarrow \quad H\psi\big|_{x=ja} = (U_j + 2\gamma)\psi_j - \gamma\psi_{j+1} - \gamma\psi_{j-1},$$

ahol $\gamma = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$ hopping $\searrow$ TB.

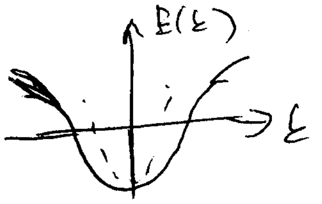
$$H = \begin{bmatrix} \ddots & -\gamma & & & \\ -\gamma & U_{-1}+2\gamma & -\gamma & & \\ & -\gamma & U_0+2\gamma & -\gamma & \\ & & -\gamma & U_1+2\gamma & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Disp. rel. Legyen $U(x) = U_0$, folyt.: $\psi_k(x) = e^{ikx} \to E = U_0 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

diszkrét: $E\psi_j = (U_0 + 2\gamma)\psi_j - \gamma\psi_{j+1} - \gamma\psi_{j-1}$

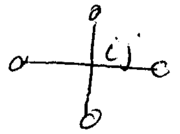
Legyen $\psi_j = e^{ikja} \rightarrow E(k) = U_0 + 2\gamma(1 - \cos ka)$

$v = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial E}{\partial k} = \frac{1}{\hbar}2a\gamma\sin ka$



parabola ha $k \ll \frac{1}{a}$

2dim: $E(k_x, k_y) = ?$

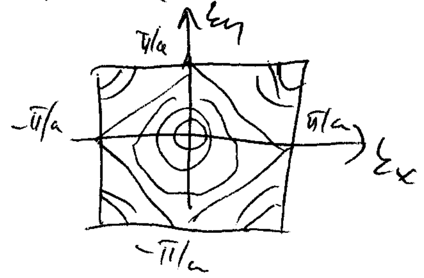


$z = 4$

$$E\psi_{ij} = (U_0 + z\gamma)\psi_{ij} - \gamma\psi_{i,j+1} - \gamma\psi_{i,j-1} - \gamma\psi_{i-1,j} - \gamma\psi_{i+1,j}$$

$$\psi_{ij} = e^{i(k_x i a + k_y j a)}$$

$$\Rightarrow E(k_x, k_y) = (U_0 + z\gamma) - 2\gamma\cos k_x a - 2\gamma\cos k_y a$$



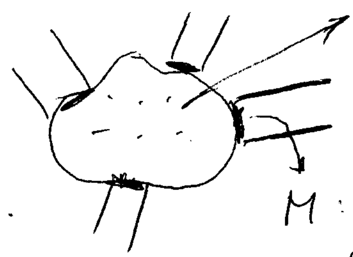
Decimálás:

$$H = \sum_i \varepsilon_i |i\rangle\langle i| + \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} V_{ij} |i\rangle\langle j|$$

→ hopping

Sch. egy.:

$$\sum_{j=1}^{M+N} H_{ij}\psi_j = E\psi_j ,$$



N: szóró tartomány pontjai

M: a leadeken a rácspontok száma

$|i\rangle$ egy hely. áll.

$$\psi_i = \langle i|\psi\rangle$$

$$H_{ij} = \langle i|H|j\rangle$$

a) Legyen l: rögzített

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq l}}^{M+N} H_{ij}\psi_j + H_{il}\psi_l = E\psi_i$$

b) Legyen $i = l \Rightarrow$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq l}}^{M+N} H_{lj}\psi_j + H_{ll}\psi_l = E\psi_l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_l = \frac{1}{E - H_{ll}} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq l}}^{M+N} H_{lj}\psi_j$$

→ beírva

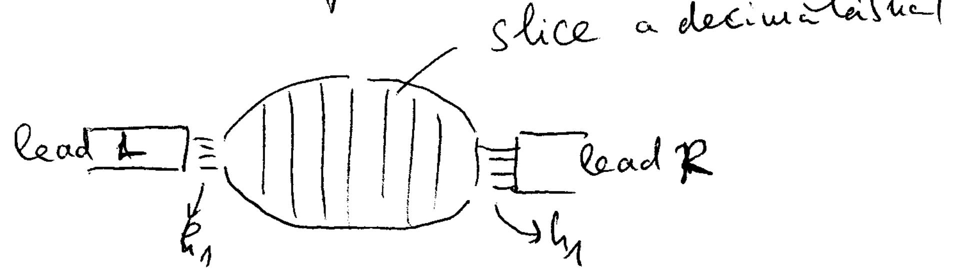
$$\Rightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq l}}^{M+N} \left(H_{ij} + \frac{H_{il}H_{lj}}{E - H_{ll}}\right)\psi_j = E\psi_i$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{M+N-1} H'_{ij}\psi_j = E\psi_i ,$$

$$\text{ahol } H'_{ij} = H_{ij} + \frac{H_{i\ell}H_{\ell j}}{E-H_{\ell\ell}}$$

Egy szab. fokkal csökkent a H_{ij} mátrix. Ismétlés

A végén H_{eff} kapjuk, $M\times M$ -es matrix



Legyen $g_L = (E-H_L)^{-1}$: right lead felület (surface) Green function

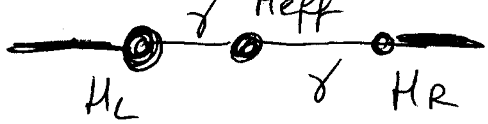
$g_R = (E-H_R)^{-1}$: left surface Green fn.

$$E - H_{total} = \begin{pmatrix} E-H_L & h_1 & 0 \\ h_1^+ & E-H_{eff} & h_1 \\ 0 & h_1 & E-H_R \end{pmatrix}$$

$$G_{total} = \begin{pmatrix} g_L^{-1} & h_1 & 0 \\ h_1^+ & E-H_{eff} & h_1 \\ 0 & h_1^+ & g_R^{-1} \end{pmatrix}^{-1}$$

Pl.:

Egy dim:

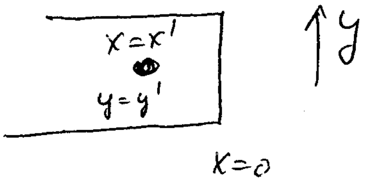


$$G = (E-H)^{-1} = \begin{pmatrix} g_L^{-1} & -\gamma & 0 \\ -\gamma & E-H_{eff} & -\gamma \\ 0 & -\gamma & g_R^{-1} \end{pmatrix}^{-1}$$

Kérdés, mennyi a surface Green-fn.?

retarded ~~semi-infinite~~ Green fn. for semi-infinite wire

Legyen Dirichlet-hat. felt. (hard wall pot.)



$\to$ $x=0$ ψ zérus

$$\psi_{m,k}(x,y) = \sqrt{\frac{2}{L}}\, \chi_m(y) \sin kx \qquad \chi_m(y) = \sqrt{\frac{2}{W}} \sin\frac{n\pi y}{W}$$

kereszt módus

$$\mathcal{E}_m(k) = \varepsilon_{m,0} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$G^R(\underbrace{x, y, x'}_{x=x'}, y') \equiv G^R(x,y,x,y') =$$

$$= \frac{2}{L} \sum_m \sum_{k>0} \frac{\chi_m(y)\chi_m(y') \sin^2 kx}{E - \varepsilon_{m,0} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + i\eta}$$

$$\sum_{k>0} \to \frac{L}{\pi}\int_0^\infty dk$$

$$\Rightarrow G^R(x,y,x,y') = \frac{2}{\pi} \sum_m \chi_m(y)\chi_m(y') \int_0^\infty \frac{\sin^2 kx}{E - \varepsilon_{m,0} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + i\eta}\, dk$$

$$\sin^2 kx = \frac{2 - e^{2ikx} - e^{-2ikx}}{4} \quad \text{és} \quad \int_0^\infty dk \to \int_{-\infty}^\infty dk$$

$$G^R(x,y,x,y') = \frac{1}{2\pi} \sum_m \chi_m(y)\chi_m(y') \int_{-\infty}^\infty \frac{1 - e^{i2kx}}{E - \varepsilon_{m,0} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + i\eta}\, dk$$

Kontur integrálás, ahogy korábban is csináltuk:

$$G^R(x,y,x,y') = \sum_m \frac{-2 \sin k_m x}{\hbar v_m} \chi_m(y)\, e^{i k_m x} \cdot \chi_m(y')$$

$$k_m = \sqrt{\frac{2m(E - \varepsilon_{m,0})}{\hbar^2}}, \quad v_m = \frac{\hbar k_m}{m}$$

Eddig folyt. x, y koordinátákkal számoltunk.

Rácson: A helyes eredményt úgy kapjuk, hogy $x = a$ vesszük.

$$g^R(y_i, y_j) = \sum_m \frac{-e^{ik_m a}}{\cancel{\hbar} v_m} \chi_m(y_i)\chi_m(y_j)$$

rácson

De láttuk, hogy $E(k) = E_{m,0} - 2\gamma \cos k_m a$

$$\Rightarrow \hbar v_m = \hbar \frac{1}{\hbar}\frac{\partial E}{\partial k} = 2\gamma a \sin k_m a$$

$$\boxed{g^R(y_i, y_j) = \sum_m \frac{-e^{ik_m a}}{\gamma a} \chi_m(y_i)\chi_m(y_j)}$$

Megj.: j, $N+1$, 1, i_0, i_0+1

$$\chi_m(y_j) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{m\pi(j-1)}{N}$$

$a = 1$

Ekkor $\chi_m(j=1) = \chi_m(j=N+1) = 0$

hard wall

Miért $x = a$ esetén kapunk helyes eredményt?

Miért nem $x = 0$-t kell venni?

Sch. egy.: $(E - u_0 - 2\gamma)\psi(n) + \gamma\psi(n+1) + \gamma\psi(n-1) = 0$, $n > 1$

$(E - u_0 + 2\gamma)\psi(1) + \gamma\psi(2) = 0$ $\quad n = 1$

teljesül, ha

$\psi(n) = A_1 \sin(kna) + A_2 \cos(kna)$, A_1 és A_2 tetszőleges

De ez az egyenlet csak akkor, ha $A_2 = 0$ és $E = u_0 + 2\gamma(1 - \cos ka)$

Megj: 1 dim. a felületi Green-fv. megkaphatjuk a tight-binding egyenletből is:

$$n>1: \quad (E-U_0-2\gamma)\, g^R(\overset{x'}{n},\overset{x}{1}) + \gamma\, g^R(n+1,1) + \gamma\, g^R(n-1,1) = 0 \qquad (1)$$

$$n=1 \quad (E-U_0-2\gamma)\, g^R(1,1) + \gamma\, g^R(2,1) = 1 \qquad (2)$$

$\hookrightarrow \delta(x-x')\,,\ x=x'$

Az első egyenletet kielégíti:

$$g^R(n,1) = g^R(1,1)\, e^{ik(n-1)a}$$

ha $E = U_0 + 2\gamma(1-\cos ka)$

beírva a (2) egyenletbe:

$$\Rightarrow \quad g^{(R)}(1,1) = \left(E-U_0-2\gamma+\gamma e^{ika}\right)^{-1} = \frac{-e^{ika}}{\gamma}$$

így

$$g^R(n,1) = \frac{-e^{ika}}{\gamma}\, e^{ik(n-1)a}$$

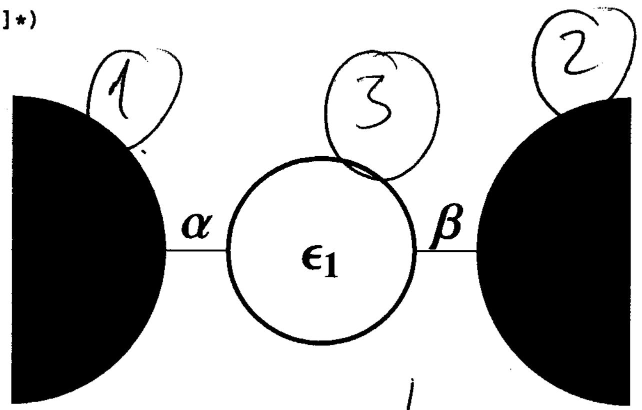
Áll: $g^{(R)}(1,1)$ felületi Green-fv. értéke kell a későbbiekben

In[1]:=
```
Remove["Global`*"]

(*  Assymetric Breit-Wigner  *)


(*e==ϵ0-2γ Cos[k]*)
```

Remove::rmnsm : There are no symbols matching "Global`*". ≫

In[2]:=
```
(*Graphics[{Black,
  Disk[{-1,0},.5,{-Pi/2,Pi/2}],Disk[{1,0},.5,{Pi/2,3Pi/2}],
  {Thick,Circle[{0,0},.3]},
  Line[{{-1,0},{-.3,0}}],
  Line[{{1,0},{.3,0}}],
  Text[Style["ϵ1",Large,Bold],{0,0}],
  Text[Style["α",Large,Bold],{-.4,.1}],
  Text[Style["β",Large,Bold],{.4,.1}]}
]*)
```

Out[3]=



Breit-Wigner resonance

In[4]:= $v = 2\gamma\,\mathrm{Sin}[k]$; $g0 = \frac{-e^{ik}}{\gamma}$;

$$G = \mathrm{Inverse}\left[\begin{pmatrix} g0^{-1} & 0 & -\alpha \\ 0 & g0^{-1} & -\beta \\ -\alpha & -\beta & -2\gamma\,\mathrm{Cos}[k] - \epsilon 1 \end{pmatrix}\right];$$

$\leftarrow (E-H)^{-1}$

$E = -2\gamma\cos k$

```
t = G[[1, 2]] v // ComplexExpand // Simplify;
```

In[7]:=
```
Tt[e_] = Assuming[α ∈ Reals && β ∈ Reals && γ ∈ Reals && k ∈ Reals && ϵ1 ∈ Reals,
    t * t* // FullSimplify] /. {k -> ArcCos[-e / (2 γ)]};
Tt[e] // TraditionalForm
```

Out[8]//TraditionalForm=

$$\frac{4\alpha^2\beta^2\left(1-\frac{e^2}{4\gamma^2}\right)}{\left(1-\frac{e^2}{4\gamma^2}\right)(\alpha^2+\beta^2)^2+\left(\frac{e(\alpha^2+\beta^2-2\gamma^2)}{2\gamma}+\gamma\epsilon 1\right)^2}$$

$E \ll 2\gamma$

$$= \frac{4\alpha^2\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2+(E-\epsilon)^2} \overset{\alpha=\beta}{=} \frac{4\alpha^4}{4\alpha^2+(E-\epsilon_1)^2}$$

In[9]:=

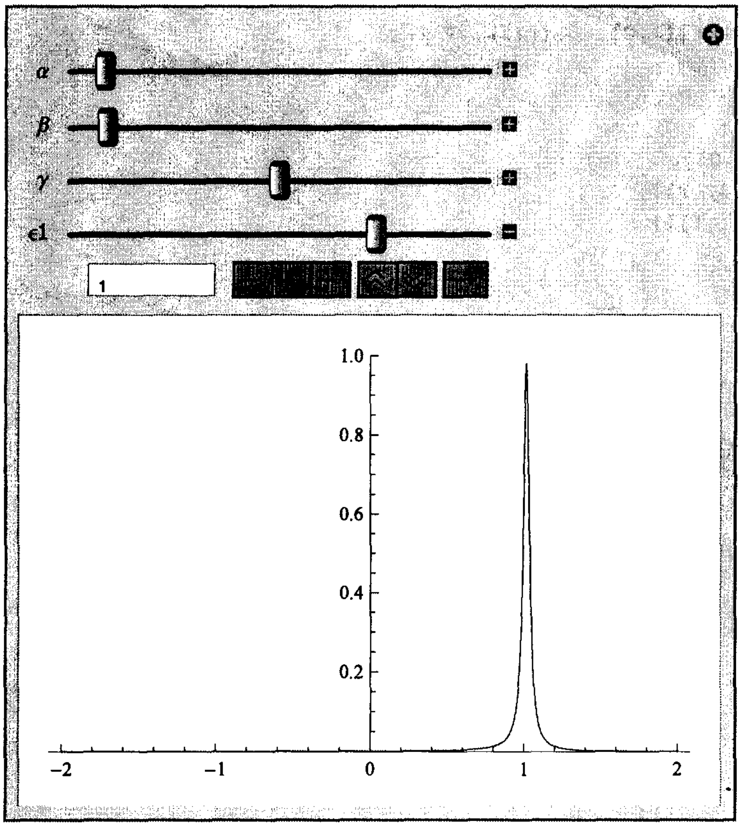
$$\frac{e}{2\gamma}(\alpha^2+\beta^2) - e\gamma + \gamma\epsilon_1$$

$$\frac{4\alpha^4}{2\alpha^4}$$

In[10]:= Manipulate[Plot[$\dfrac{4\,\alpha^2\,\beta^2\left(1-\frac{e^2}{4\,\gamma^2}\right)}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2\left(1-\frac{e^2}{4\,\gamma^2}\right)+\left(\frac{e\,\left(\alpha^2+\beta^2-2\,\gamma^2\right)}{2\,\gamma}+\gamma\,\epsilon 1\right)^2}$, {e, -2, 2}, PlotRange → {0, 1}],

{{α, .1}, 0, 2}, {{β, .1}, 0, 2}, {{γ, 1}, .5, 1.5}, {{ϵ1, 0}, -2, 2}]

Out[10]=



In[11]:= (*Fano*)

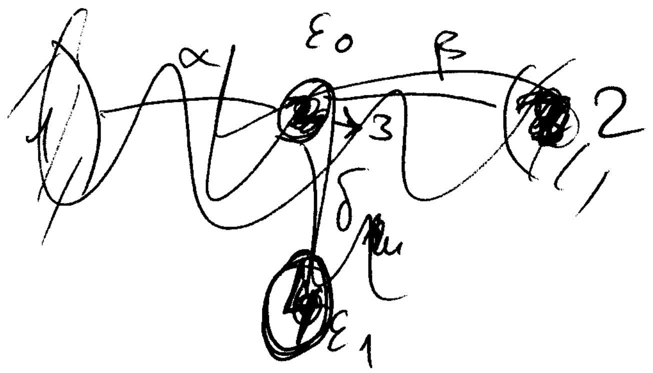
```
(*
Graphics[{Black,
  Disk[{-1,0},.5,{-Pi/2,Pi/2}],Disk[{1,0},.5,{Pi/2,3Pi/2}],
  {Thick,Circle[{0,0},.3]},
  Line[{{-1,0},{-.3,0}}],
  Line[{{1,0},{.3,0}}],
  Text[Style["ϵ1",Large,Bold],{0,0}],
  Text[Style["α",Large,Bold],{-.4,.1}],
  Text[Style["β",Large,Bold],{.4,.1}],
  {Thick,Circle[{0,1},.3]},
  Text[Style["ϵ2",Large,Bold],{0,1}],
  Line[{{0,0.3},{0,0.7}}],
  Text[Style["δ",Large,Bold],{0.1,.5}]}
]
*)
```

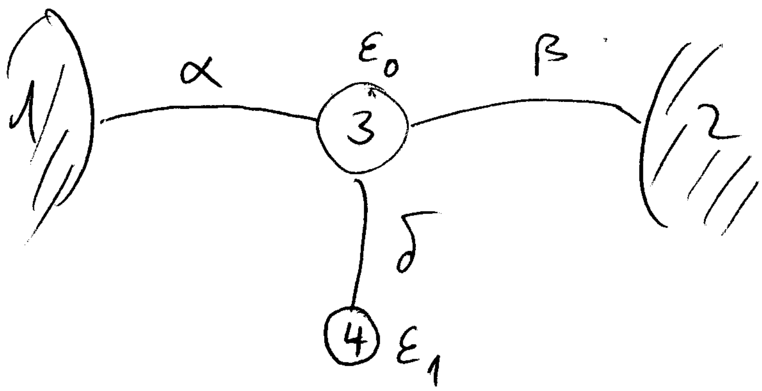
(*

$$G=\text{Inverse}\left[\begin{pmatrix} g0^{-1} & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & g0^{-1} & -\beta & 0 \\ -\alpha & -\beta & -2\gamma\ \text{Cos}[k]-\epsilon 1 & -\delta \\ 0 & 0 & -\delta & -2\gamma\ \text{Cos}[k]-\epsilon 1 \end{pmatrix}\right];$$

*)

Fano $\rightarrow$ låsd at åbråt





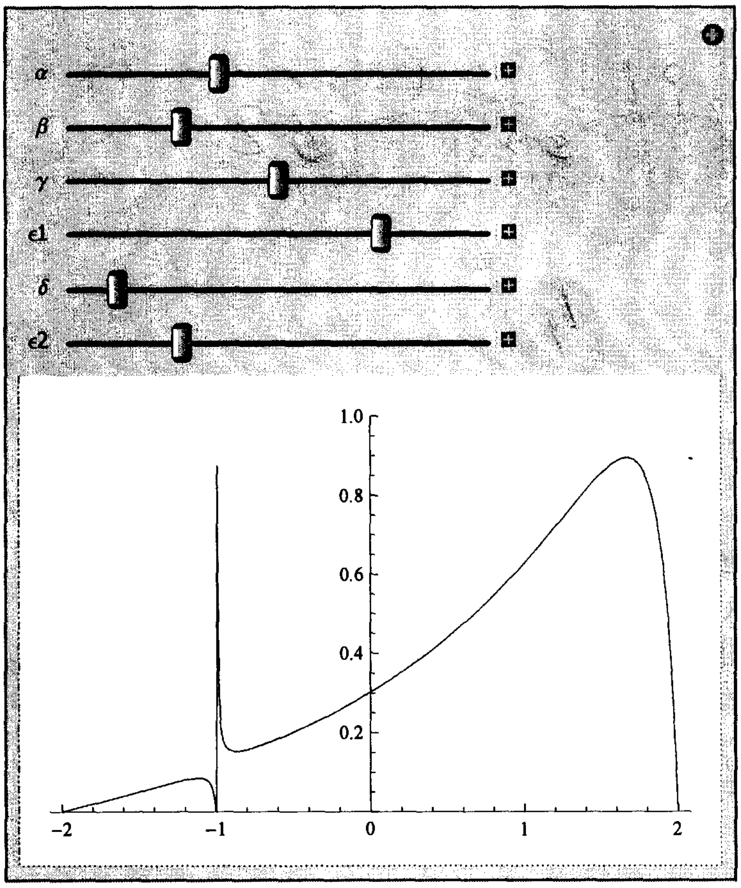
In[15]:= $$\frac{4\,\alpha^2\,\beta^2\left(1-\frac{e^2}{4\,\gamma^2}\right)}{\left(1-\frac{e^2}{4\,\gamma^2}\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2+\left(\frac{e\,\left(\alpha^2+\beta^2-2\,\gamma^2\right)}{2\,\gamma}+\gamma\left(\epsilon 1-\frac{\delta^2}{e-\epsilon 2}\right)\right)^2}$$ `// TraditionalForm`

Out[15]//TraditionalForm=

$$\frac{4\,\alpha^2\,\beta^2\left(1-\frac{e^2}{4\gamma^2}\right)}{\left(1-\frac{e^2}{4\gamma^2}\right)(\alpha^2+\beta^2)^2+\left(\frac{e(\alpha^2+\beta^2-2\gamma^2)}{2\gamma}+\gamma\left(\epsilon 1-\frac{\delta^2}{e-\epsilon 2}\right)\right)^2}$$

In[16]:= **Manipulate**[**Plot**[$\frac{4\,\alpha^2\,\beta^2\left(1-\frac{e^2}{4\,\gamma^2}\right)}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2\left(1-\frac{e^2}{4\,\gamma^2}\right)+\left(\frac{e\,\left(\alpha^2+\beta^2-2\,\gamma^2\right)}{2\,\gamma}+\gamma\left(\epsilon 1-\frac{\delta^2}{e-\epsilon 2}\right)\right)^2}$, **{e, -2, 2}, PlotRange → {0, 1}**],

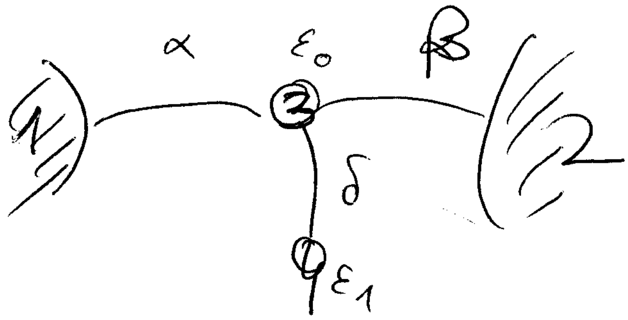
{{α, .1}, 0, 2}, {{β, .1}, 0, 2}, {{γ, 1}, .5, 1.5},
{{ε1, 0}, -2, 2}, {δ, 0, 1.5}, {{ε2, 0}, -2, 2}]



In[17]:= **fanoT** = $$\frac{4\,\alpha^2\,\beta^2\left(1-\frac{e^2}{4\,\gamma^2}\right)}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2\left(1-\frac{e^2}{4\,\gamma^2}\right)+\left(\frac{e\,\left(\alpha^2+\beta^2-2\,\gamma^2\right)}{2\,\gamma}+\gamma\left(\epsilon 1-\frac{\delta^2}{e-\epsilon 2}\right)\right)^2}$$

Out[17]=

$$\frac{4\,\alpha^2\,\beta^2\left(1-\frac{e^2}{4\,\gamma^2}\right)}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2\left(1-\frac{e^2}{4\,\gamma^2}\right)+\left(\frac{e\,\left(\alpha^2+\beta^2-2\,\gamma^2\right)}{2\,\gamma}+\gamma\left(\epsilon 1-\frac{\delta^2}{e-\epsilon 2}\right)\right)^2}$$



Fano
resonance

```
(*
```

$$G=\text{Inverse}\left[\begin{pmatrix} g0^{-1} & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & g0^{-1} & -\beta & 0 \\ -\alpha & -\beta & -2\gamma\ \text{Cos}[k]-\epsilon 1 & -\delta \\ 0 & 0 & -\delta & -2\gamma\ \text{Cos}[k]-\epsilon 1 \end{pmatrix}\right];$$

```
*)
```

Kvantum Hall-effektus (egész számú)

Drude-modell, kis $\underline{B}$-tér!

$B=\begin{pmatrix}0\\0\\B\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}E_x\\E_y\end{pmatrix}$

$$\frac{m\underline{v}}{\tau}=e\left(\underline{E}+\underline{v}\times\underline{B}\right)$$
, τ: impulzus relax idő
ütközési idő

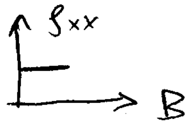
$$\Rightarrow \begin{pmatrix}E_x\\E_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{m}{e\tau} & -B\\ B & \frac{m}{e\tau}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_x\\v_y\end{pmatrix}$$

$\underline{J}=e\underline{v}\cdot n_s$ áramsűrűség, n_s: elektronsűrűség (per felület)

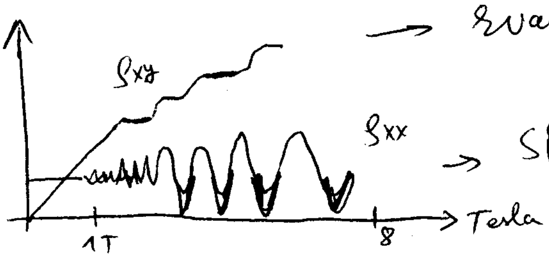
$$\Rightarrow \begin{pmatrix}E_x\\E_y\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{m}{e^2\tau n_s} & \frac{-B}{e n_s}\\ \frac{B}{e n_s} & \frac{m}{e^2\tau n_s}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}J_x\\J_y\end{pmatrix} \rightarrow \underline{E}=\underline{\underline{\sigma}}^{-1}\underline{J}$$

$$\underline{\underline{\rho}}=\underline{\underline{\sigma}}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{m}{e^2\tau n_s} & \frac{-B}{e n_s}\\ \frac{B}{e n_s} & \frac{m}{e^2\tau n_s}\end{bmatrix} \rightarrow \rho_{xx}=\rho_{yy}=\frac{1}{\sigma_0}=\frac{m}{e^2\tau n_s}$$

$$\rho_{xy}=-\rho_{yx}=\frac{B}{|e| n_s}$$



Nagyobb tereknél $\rightarrow$ Landau-~~sz~~nívók. (Klitzing, et. al PRL, 45 494 ('80))

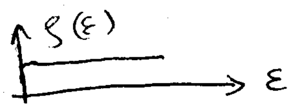


$\rightarrow$ kvantált Hall-ellenállás

$\rightarrow$ Shubnikov-de Haas-effektus (SdH) (1930, bulk fémre)

$\rho_{xx}\approx 0$ és oszcillál, $\rho_{xy}\approx$ plató, amikor $\rho_{xx}\approx 0$.

SdH oszcilláció oka: Ha $\underline{B}=0\Rightarrow$ 2 dim az állapotsűrűség állandó. $\rho_{2D}(\varepsilon)=\frac{m}{\pi\hbar^2}$



$\underline{B}\neq 0$ $E_n=\hbar\omega_c(n+\frac{1}{2})$

$\omega_c=\frac{eB}{m}$

$$\rho(\varepsilon)=\underbrace{\frac{2eB}{h}}_{\rho_0}\sum_{n=0}^{\infty}\delta\left(\varepsilon-\hbar\omega_c(n+\tfrac{1}{2})\right)$$

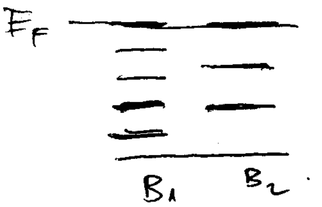
ϱ_0 kiszámolható úgy, hogy a 2D állapotsűrűség $\varrho_{2D} = \frac{m}{\hbar^2 \pi}$

Így $\hbar\omega_c$ energia intervallumban $\varrho_{2D}\cdot\hbar\omega_c$ állapot van.
Ezek az állapotok a $\underline{B}$ tér bekapcsolásával mind a Landau-nívóra koncentrálódnak $\Rightarrow$ $\varrho_0 = \varrho_{2D}\cdot\hbar\omega_c = \frac{m}{\pi\hbar^2}\cdot\hbar\omega_c = \frac{m}{\pi\hbar}\cdot\frac{eB}{m} = \frac{2eB}{h}$

$\varrho(\varepsilon)$-ban a δ csúcsok kiszélesednek a szennyezések általi szórás miatt.

$B \nearrow \Rightarrow \hbar\omega_c \nearrow \Rightarrow$ a Landau-nívó emelkedik

$\Rightarrow \varrho_{xx}$ oszcillál, amikor a E_F elmozdul egyik Landau-nívóról a másikra.



ϱ_0 a Landau-nívó degenerációja! (egységnyi felületre!)
n_s az elektronsűrűség (egységnyi felületre)

$$\frac{n_s}{\varrho_0(B_1)} - \frac{n_s}{\varrho_0(B_2)} = 1$$ a feltétel, hogy B_1 és B_2 két egymást követő csúcs helye ϱ_{xx}-nek.

$$n_s = \frac{2e}{h}\,\frac{1}{\frac{1}{B_1}-\frac{1}{B_2}}$$ → mérési módszer n_s-mérésére.

$\frac{1}{B}$-ben oszcillál ϱ_{xx}!

Mikor látható a kvantum hatás (Landau-nívók következménye)?

$\frac{1}{\omega_c}$ = a ciklotron mozgásnál a keringési idő

Kvantum hatás lép fel, ha $\frac{1}{\omega_c} \ll \tau$

$\Rightarrow \hbar\omega_c \gg \frac{\hbar}{\tau} \approx$ a Landau-nívó kiszélesedése a szennyezéseken való szórás miatt.

mozgékonyság: $\mu_m = \frac{e\tau}{m}$ és $\omega_c = \frac{|e|B}{m}$ $\Rightarrow$ $B \gg \frac{1}{\mu_m}$

Ha $\mu_m = 10^6 \frac{cm^2}{Vs} = 10^2 \frac{m^2}{Vs}$
már $B = 10^{-2}\,T = 100$ Gauss-nál van kvantum-effektus.

Nagy mozgékonyságú el.-ra kisebb $\underline{B}$ tér is elég, hogy a kvantum hatások megjelenjenek.

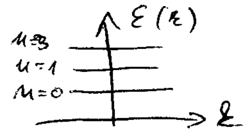
T alacsony, néhány K.

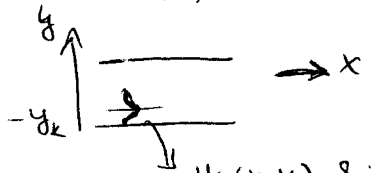
Korábban láttuk (ismétlés):

$$\hat{H} = \frac{(\underline{p}-e\underline{A})^2}{2m} \qquad \underline{A} = \begin{pmatrix}-By\\0\\0\end{pmatrix}, \quad [\hat{p}_x, \hat{H}] = 0 \Rightarrow p_x = \hbar k$$

$$\psi(x,y) = \varphi(y)\, e^{ikx}$$

$$\boxed{\varepsilon_n(k) = \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega_c}$$





$$v_n(k) = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial \varepsilon_n(k)}{\partial k} = 0$$

$$\boxed{y_k = \frac{\hbar k}{eB}} \qquad \boxed{\omega_c = \frac{|e|B}{m}}$$

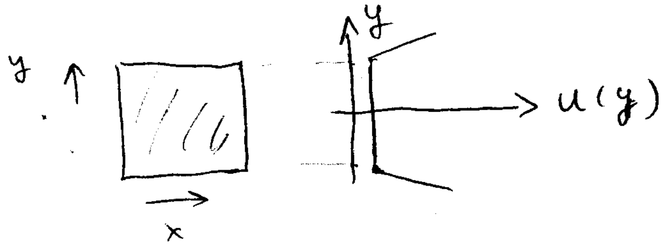
$\psi_{n,k}(x,y)$ kiterjedése y irányban $\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}}$

$$\psi_{n,k}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{L}}\, e^{ikx}\, u_n(q+q_k)$$

$u_n(q) = e^{-\frac{q^2}{2}} H_n(q) \qquad q = \sqrt{\frac{m\omega_c}{\hbar}}\, y$

Hermite-polinom $\qquad q_k = \sqrt{\frac{m\omega_c}{\hbar}}\, y_k$

Mi van ha van confining-potential?



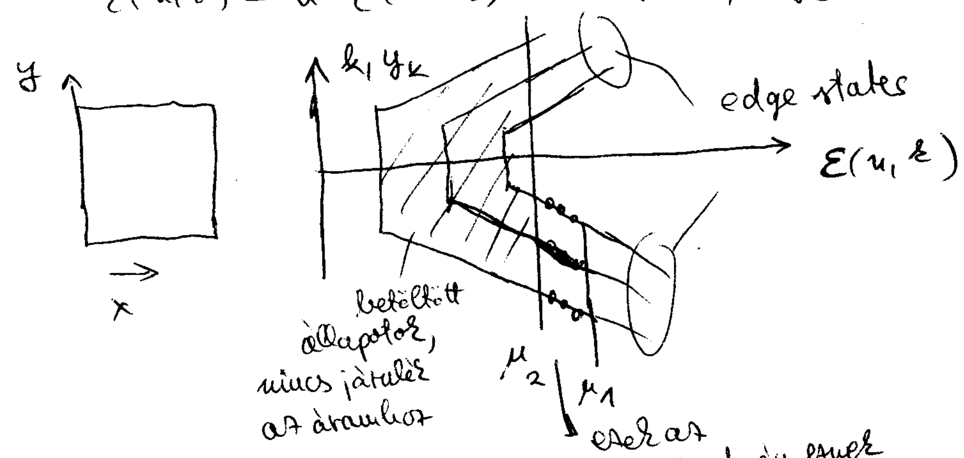
Nagy B-térnél $r_c = \frac{v}{\omega_c} \sim \frac{1}{B} \ll 1$

Ha r_c elég kicsi, hogy az $U(y)$ konstans ezen a skálán, akkor használhatjuk a perturbáció számítást

$$\varepsilon(n,k) = \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega_c + \langle n,k|\, U(y)\, |n,k\rangle \simeq U(y_k)$$

, de $|n,k\rangle$ centrált y_k körül és a kiterjedése $\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}}$ y-irányban

$$\Rightarrow \quad \varepsilon(n,k) = \hbar\omega_c\left(n+\tfrac{1}{2}\right) + U(y_k), \quad y_k = \frac{\hbar k}{eB}$$



A minta szélén vannak azok az elektron állapotok (edge states), melyek viszik az áramot.

↓

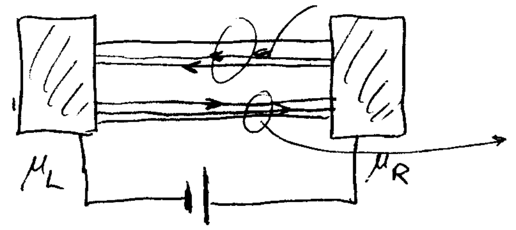
Edge state sebessége:

$$v(n,k) = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial \varepsilon(n,k)}{\partial k} = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial U(y_k)}{\partial k} = \frac{1}{\hbar}\frac{dU(y)}{dy}\cdot\frac{dy_k}{dk} = \frac{1}{eB}\cdot\frac{dU(y)}{dy}$$

A minta két szélén az edge states ellentétes irányban mozognak.

($\frac{dU(y)}{dy}$ előjelet vált a minta két szélén.)

edge state egyensúlyban μ_R-rel



edge state egyensúlyban μ_L

A minta két szélén lévő edge state-ek térbelileg (y irányban) szeparálódnak, az overlapping exponenciálisan kicsi köztük. (az edge state-ek kiterjedése $\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}}$ és exponenciálisan lecseng $e^{-y^2/2}$)

A minta szélein lévő szennyezők nem képesek az egyik edge state-ből a másik irányban haladó edge state-be szórni az elektront. Teljes suppression of backscattering, ha E_F két Landau nívó között van.

A balról induló edge state-ek egyensúlyban vannak μ_R reservoirral, míg a jobbról induló –"– –"– –"– μ_L –"–. (Ami pl. jobbról elindul az mind bemegy a baloldali reservoirrral.

$\Rightarrow$ Zérus a longitudinális ellenállás! $R_L = 0$!

Ha E_F éppen az egyik Landau-nívón van, akkor már vannak olyan állapotok, melyeken keresztül az elektron szóródhat. Ezek az állapotok a minta belsejében vannak. Így lehetséges visszaszórás, ami ellenállás maximumot eredményez a longitudinális R_L-ben.

Mennyi az áram? A helyzet nagyon hasonló a ballisztikus transzporthoz.

$$I = \frac{2e}{L}\sum_n\sum_k \frac{1}{\hbar}\frac{\partial\varepsilon}{\partial k} = \frac{2e}{L}\sum_n\int_{\mu_R}^{\mu_L}\frac{L}{2\pi}\frac{1}{\hbar}\frac{\partial\varepsilon}{\partial k}dk = \frac{2e}{h}\sum_n\int_{\mu_R}^{\mu_L}d\varepsilon = \frac{2e}{h}M(\mu_L-\mu_R)$$

$$R_L = \frac{U_L}{I} = 0 \quad \text{és} \quad R_H = \frac{U_H}{I} = \frac{h}{2e^2 M}$$

M: Edge state-ek száma.

$$M = \left[\frac{E_F}{\hbar\omega}\right] \text{ egész szám!}$$

$$R_H = \frac{h}{2e^2 M} = \frac{25.8128\ k\Omega}{2M}$$

Pontosság R_H-ban $< 10^{-6}$! $\Rightarrow$ oka: a tökéletes suppression of backscattering! Hiába vannak szennyezők! $L_x \simeq 100\,\mu m$ esetén is!!!

Széles minta esetén el szokták hanyagolni az edge state-ek számát, mert csak egy tört része a teljes vezetőben lévő állapotoknak.

Az edge state-ek a véges méret miatt.

(Ilyen véges-méret effektus lép fel az elektron diamágneses szuszceptibilitásának számításánál is.)

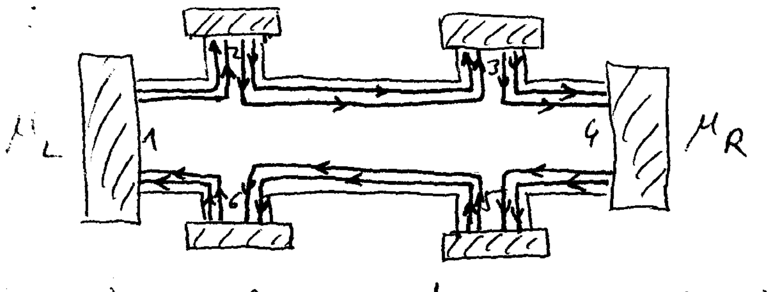
A kvantum Hall-ban az edge state-ek eredményezik az effektust!

$R_L = 0$, ha E_F két Landau-nivó között van.

$R_L = max$, ha E_F = valamely Landau-nivóval.

(Ez meglepő, hiszen, ha E_F a két Landau-nivó között van, akkor az állapotsűrűség majdnem zérus, azaz nincs el. áll ami viszi az áramot → nagy R_L-t várnánk. Hasonlóan, mikor E_F = Landau-nivó → van elég el., ami viszi az áramot → R_L ~ kicsi.
Az ellentmondás feloldása: A bulkban valóban a fenti érvelés a helyes, de véges mintában az E_F energiájú elektronállapotok azok az edge state-ek, melyek a két Landau-nivó között vannak és képesek az áramot vinni.)

Büttiker-formula alkalmazása



Makroszkopikus minta ($\sim 100\,\mu m = L_x, L_y$)

Mivel nincs visszaszórás, könnyű számolni a T_{ab} transzmissziós-függvényt.

Posztulátum: Elektron halad egyik terminálról a másikra szóródás nélkül. Ez az amit láttunk és jól teljesül a kísérletekben. Teljes suppression of backscattering.
Az edge state-ek halad szóródás nélkül egyik terminálról a másikra.

$T_{ab} = M = $ (edge statek száma $= \frac{E_F}{\hbar\omega_c}$) Az ábrán $M=2$.

Ezek alapján a G_{ab} a következő alakú:

$$G_{ab} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_c \\ G_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_c & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

, ahol $G_c = \frac{2e^2}{h} M$

Büttiker-formula:

$$I_a = \sum_b G_{ab}\left[V_a - V_b\right] = V_a \sum_b G_{ab} - \sum_b G_{ab} V_b$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} I_1 &= V_1 G_c - G_c V_6 \\ I_2 &= V_2 G_c - G_c V_1 \\ I_3 &= V_3 G_c - G_c V_2 \\ I_4 &= V_4 G_c - G_c V_3 \\ I_5 &= V_5 G_c - G_c V_4 \\ I_6 &= V_6 G_c - G_c V_5 \end{aligned}$$

Legyen $V_4 = 0$

Mivel 2, 3, 5, 6 terminálra feszültség-mérőt kapcsolunk $\Rightarrow$

$I_2 = I_3 = 0$ és $I_5 = I_6 = 0$

$V_1 = V_2$, $V_2 = V_3$, $V_5 = 0$, $V_6 = 0$

$I_1 = V_1 G_c$

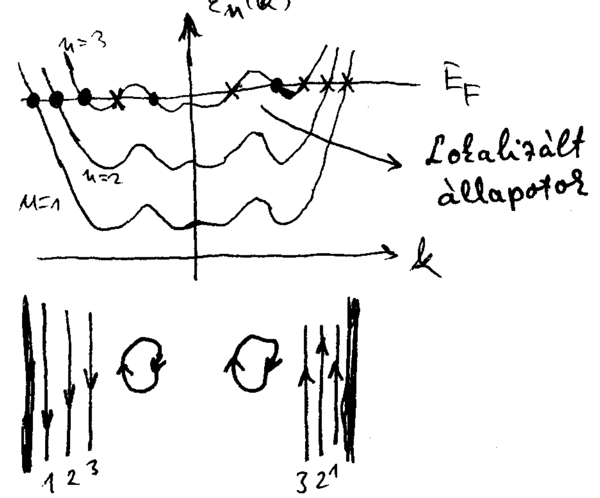
$$\Rightarrow \quad R_L = \frac{V_2 - V_1}{I_1} = \frac{V_6 - V_5}{I_1} = 0$$

$$R_H = \frac{V_2 - V_6}{I_1} = \frac{V_3 - V_5}{I_1} = \frac{V_1}{I_1} = G_c^{-1} = \boxed{\left[\frac{2e^2}{h} M\right]^{-1}}$$

A Büttiker-formula egyszerűen magyarázza a Hall-ellenállást és a R_L ellenállást egyszerre.

Edge states rendezetlen vezetőben (szennyezők hatása):

U(y) potenciál fluktuál. $\rightarrow$

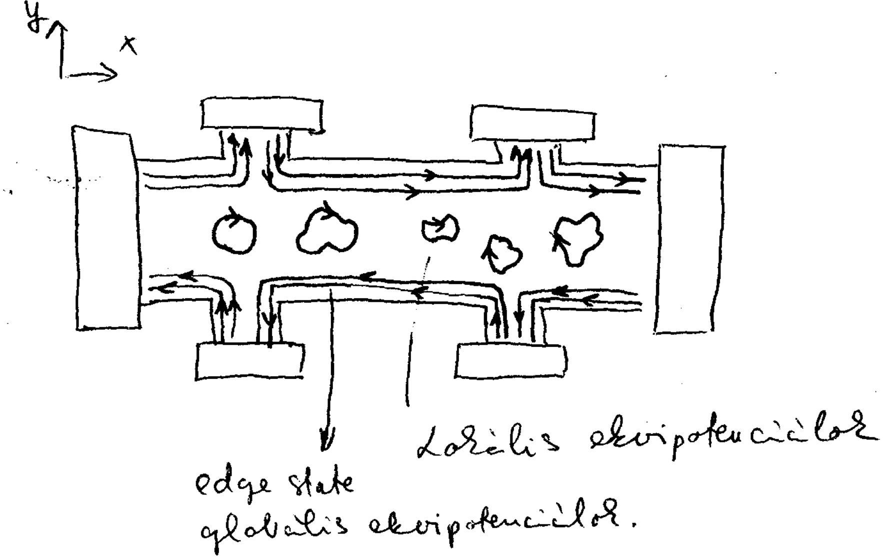


Külső $\underline{E}$ és $\underline{B}$ térben az elektron drift sebessége (mozgó koordinátarendszer, stb.)

$\underline{v} = \underline{E} \times \underline{B}$, de $E = -\mathrm{grad}\, U$

$\Rightarrow \underline{v} \perp \mathrm{grad}\, U \Rightarrow$

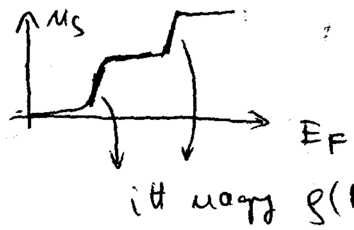
$\underline{v} \parallel U$ ekvipotenciál mentén mozog az elektron.



A minta belsejében megjelennek <u>lokalizált állapotok</u>.

Mi az oka, hogy $E_F \Rightarrow$ két Landau nívó között van?

elektron sűrűség $\rightarrow n_s = \int_{-\infty}^{E_F} \varrho(\varepsilon, B)\, d\varepsilon \Rightarrow \delta n_s = \varrho(E_F, B)\, \delta E_F$



ahol ϱ nagy ott $\frac{dn_s}{dE_F}$ nagy.

Ha ϱ kicsi akkor

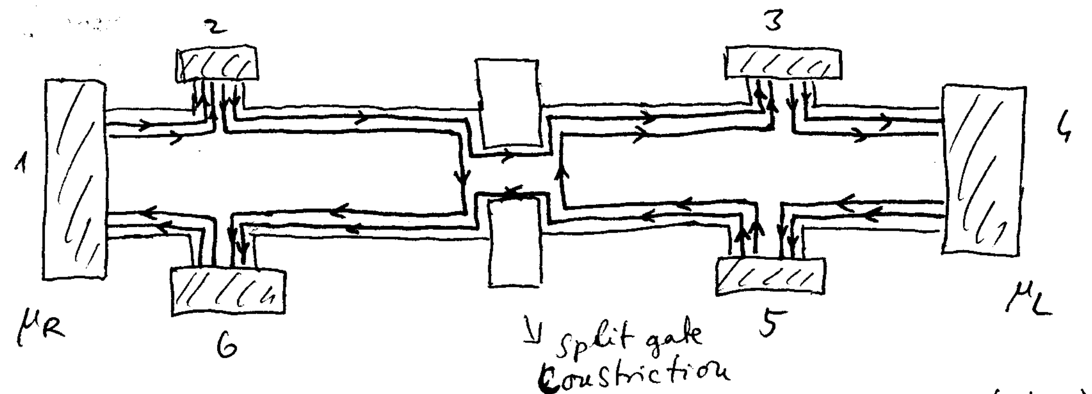
$\delta E_F = \frac{\delta n_s}{\varrho}$ nagy már kis δn_s-nél is.

Így E_F olyan értékre áll be, ahol ϱ nagy. Az állapotsűrűség ϱ éppen a Landau-nívón válik naggyá. Így E_F a Landau-nívóra áll be.

Ez viszont azt jelenti, hogy E_F nem két Landau-nívó között van, ami a feltétele annak, hogy $R_L = 0$ legyen.

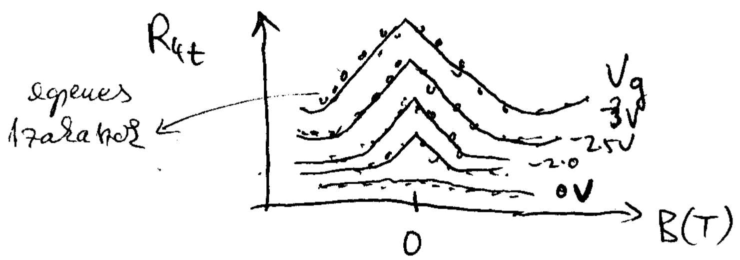
<u>Az ellentmondás feloldása</u>: A <u>lokalizált állapotok</u> betöltődésével mozdul el az E_F a Landau-nívóról és kerül két Landau-nívó közé. Ugyanakkor ezek a lokalizált állapotok <u>nem járulnak</u> az áramhoz. Amint E_F átmegy két Landau-nívó közti gapen a lokalizált állapotok kezdenek betöltődni és közben nincs ellenállás-járuléka $\Rightarrow$ csak egy <u>platót</u> eredményez ϱ_{xy}-ben, R_H-ban.

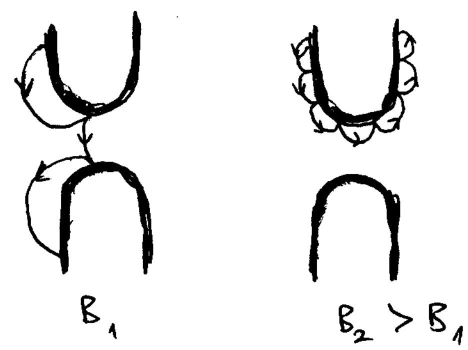
Suppression of backscattering, edge-state-ek detektálása



Four-terminal mérésnél az ellenállás (longitudinális) csökkenését tapasztalták $\underline{B}$ növelésekor.

$$R(\underline{B}) - R(0) < 0$$





B növelésével

a ciklotron sugár kisebb a rés méreténél, ← klasszikus kép
az elektron át tud haladni a résen. Így B növelésével nincs elektron visszaszórás.

Magyarázat a Landauer-Büttiker-formalizmussal

Tfh. az ①-ből M módus (edge-state) jön ki. A constriction-nál $(M > N)$ N módus (edge state) halad át. Legyen $p = \frac{M-N}{M}$

$$\Downarrow \qquad \Rightarrow$$

$$(1-p)M = N \qquad M - N = pM$$

Ekkor felírhatjuk a G_{ab} mátrixot.

$$G_{ab} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_c \\ G_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-p)G_c & 0 & 0 & pG_c & 0 \\ 0 & 0 & G_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_c & 0 & 0 \\ 0 & pG_c & 0 & 0 & (1-p)G_c & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{I_a = \sum_b G_{ab}(V_a - V_b)} \Rightarrow I_a = V_a \sum_b G_{ab} - \sum_b G_{ab} V_b$$

$$I_1 = V_1 G_c - V_6 G_c$$
$$I_2 = V_2 G_c - V_1 G_c$$
$$I_3 = V_3 G_c - (1-p) G_c V_2 - p G_c V_5$$
$$I_4 = V_4 G_c - V_3 G_c$$
$$I_5 = V_5 G_c - V_4 G_c$$
$$I_6 = V_6 G_c - p G_c V_2 - (1-p) G_c V_5$$

$G_c = \frac{2e^2}{h} M$

Legyen $V_4 = 0$.

A 2, 3, 5, 6 terminálokra feszültségmérőt kapcsolunk, ezért $I_2 = I_3 = I_5 = I_6 = 0$

$\Rightarrow V_5 = 0, \quad V_1 = V_2, \quad V_6 = pV_2, \quad V_3 = (1-p)V_2$

$\Rightarrow I_1 = (V_1 - V_6)G_c = (V_1 - pV_2)G_c = (1-p)V_1 G_c$

$$\Rightarrow R_L = \frac{V_2 - V_3}{I_1} = \frac{V_6 - V_5}{I_1} = \frac{V_1 - (1-p)V_1}{I_1} = \frac{p}{1-p}\frac{1}{G_c} = \boxed{\frac{h}{2e^2}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{M}\right)}$$

$$R_H = \frac{V_2 - V_6}{I_1} = \frac{V_1 - pV_1}{I_1} = \frac{(1-p)V_1}{(1-p)G_c V_1} = \frac{1}{G_c} = \boxed{\frac{h}{2e^2}\frac{1}{M}}$$

A Hall-ellenállás <u>nem változik</u>, a split gate nincs hatással rá.
(Hiszen: 2, 6 kontaktusoktól távol van a split gate)

A longitudinális ellenállás:

$$R_L = \frac{h}{2e^2}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{M}\right)$$

Az ① kontaktusnál egy 2D el.gáz van $\underline{B}$ térben $\rightarrow$ Landau-nívók

$\Rightarrow$ Az edge state-ek száma $= M = \frac{E_F}{\hbar\omega_c} \sim \frac{1}{B}$

$$\Rightarrow \quad R_L = \frac{h}{2e^2}\left(\frac{1}{N} - \frac{\hbar\omega_c}{E_F}\right) = \frac{h}{2e^2}\left(\frac{1}{N} - \frac{\hbar e}{E_F m} B\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dR_L(B)}{dB} = \text{áll} < 0$$

(Meg lehet mutatni, hogy $B<0$ térre $\frac{dR_L(B)}{dB} > 0$.)

(1.4.3a)

$/|e|n_s$ (1.4.3b)

he longitudinal resistance is
nearly with magnetic field.

red by preparing a rectangu-
v along the x-direction and
$V_1 - V_2$) and the transverse
.4.1). Since $J_y = 0$, we can

$= \rho_{yx} J_x$

$_H = E_y W$. Hence the resistivi-
and transverse voltages by

$= \dfrac{V_H}{I}$

inal voltage V_x and the trans-
GaAs film using a rectangular

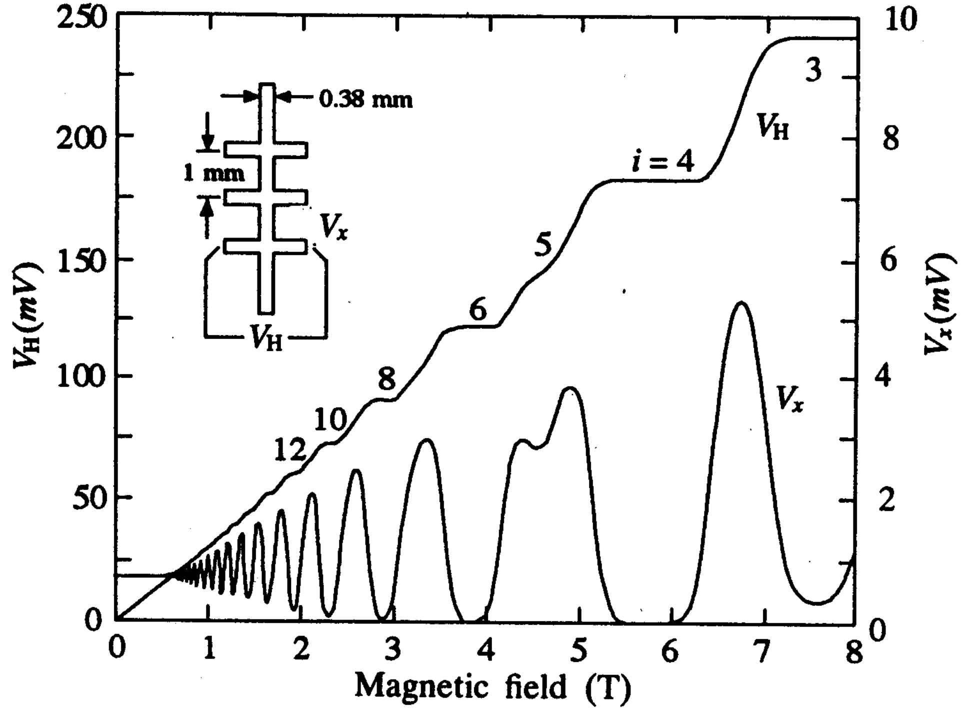


Fig. 1.4.2. Measured longitudinal and transverse voltages for a modulation-doped GaAs film at $T = 1.2$ K ($I = 25.5$ μA). Reproduced with permission from Fig. 1 of M. E. Cage, R. F. Dziuba and B. F. Field (1985), *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **IM-34**, 301. © 1985 IEEE

constant while the Hall voltage increases linearly in agreement with the predictions of the semiclassical Drude model described above. At high fields, however, the longitudinal resistance shows pronounced oscillatory behavior while the Hall resistance exhibits plateaus corresponding to the minima in the longitudinal resistance. These features are usually absent at room temperature or even at 77 K but quite evident at cryogenic temperatures of 4 K and below. To understand these features we need to go

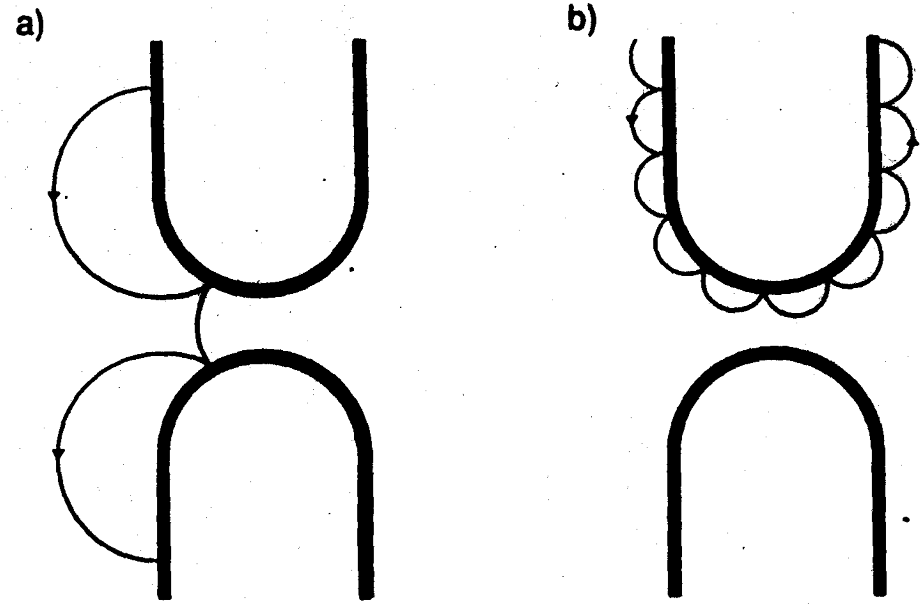


FIG. 51. Illustration of the reduction of backscattering by a magnetic field, which is responsible for the negative magnetoresistance of Fig. 50. Shown are trajectories approaching a constriction without a potential barrier, in a weak (a) and strong (b) magnetic field. Taken from H. van Houten *et al.*, in "Nanostructured Systems" (M. A. Reed, ed.). Academic, New York.

Here N_{wide} is the number of occupied Landau levels in the wide 2DEG regions. The simplest (but incomplete) argument leading to Eq. (13.7) is that the additivity of voltages on reservoirs (ohmic contacts) implies that the two-terminal resistance $R_{2t} = (h/2e^2)N_{\text{min}}^{-1}$ should equal the sum of the Hall resistance $R_H = (h/2e^2)N_{\text{wide}}^{-1}$ and the longitudinal resistance R_L. This argument is incomplete because it assumes that the Hall resistance in the wide regions is not affected by the presence of the constriction. This s tabulated in Fig. 49 should

acy of the energy levels is at *odd* multiples of e^2/h. a particularly clear fashion, rpendicular) to the 2DEG. required to fully lift the spin

all fraction of the electrons is transmitted through the attered back into the source sistance of a ballistic point w a relatively weak magnetic *backscattering* caused by the ount of backscattering caused emains essentially unaffected. gnetic field is observed as a)] in a *four-terminal* measure- nce R_L. The voltage probes in G regions, well away from the ws the establishment of local in weak magnetic fields (cf. -terminal resistance does not mental results for R_L in this

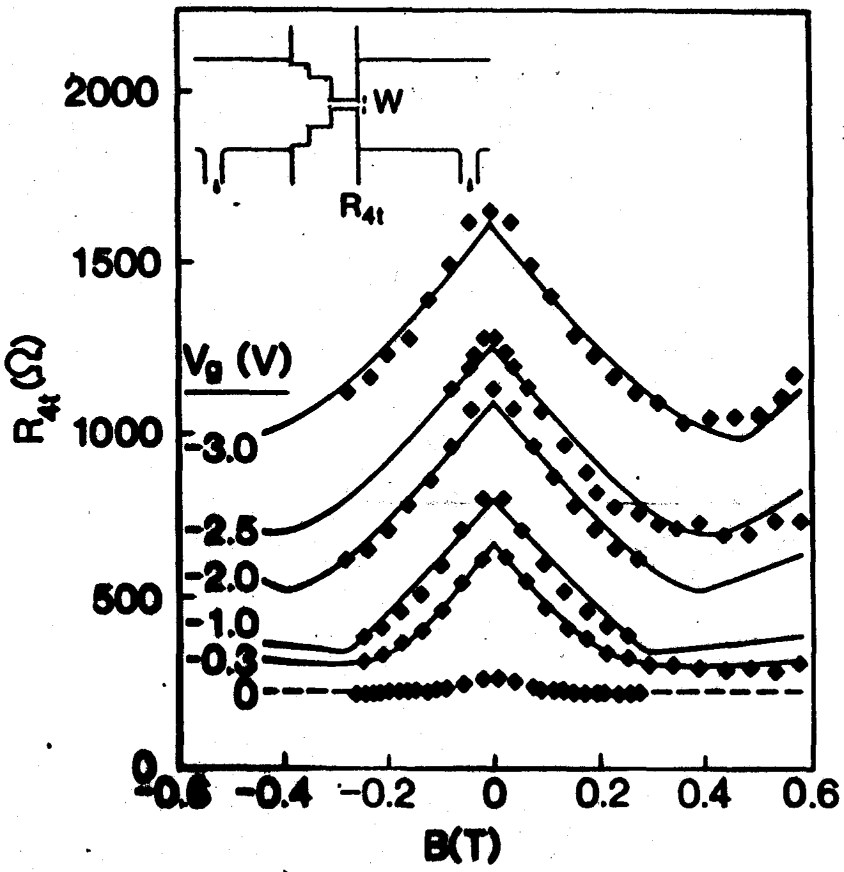
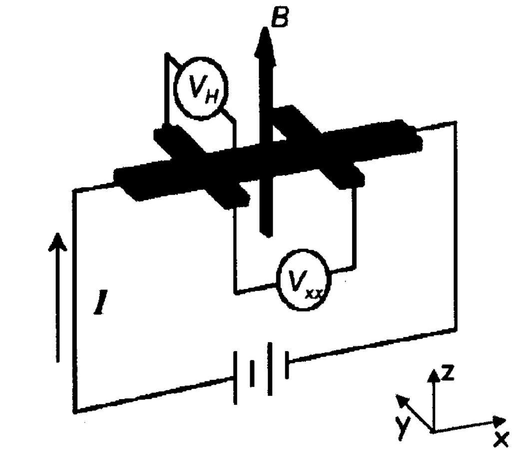


FIG. 50. Four-terminal longitudinal magnetoresistance R_L of a constriction for a series of gate voltages. The negative magnetoresistance is temperature independent between 50 mK and 4 K. Solid lines are according to Eqs. (13.7) and (10.8), with the constriction width as adjustable parameter. The inset shows schematically the device geometry, with the two voltage probes used to measure R_L. Taken from H. van Houten *et al.*, *Phys. Rev. B* 37, 8534 (1988).

approximately constant [cf. Fig. 31 or Eq. (10.8)], so R_{2t} is only weakly dependent on B in this field regime. For stronger fields Eq. (13.6) describes a positive magnetoresistance, because N_{min} decreases due to the magnetic

Klasszikus Hall-effektus

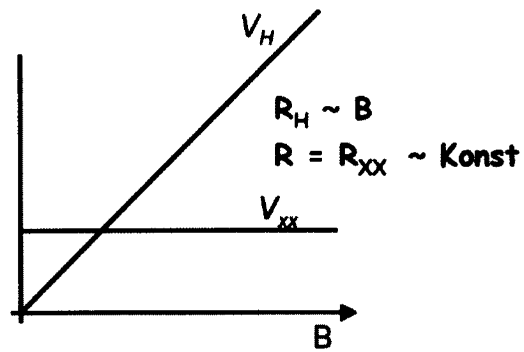
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad \mathbf{J} = en_s\mathbf{v}$$



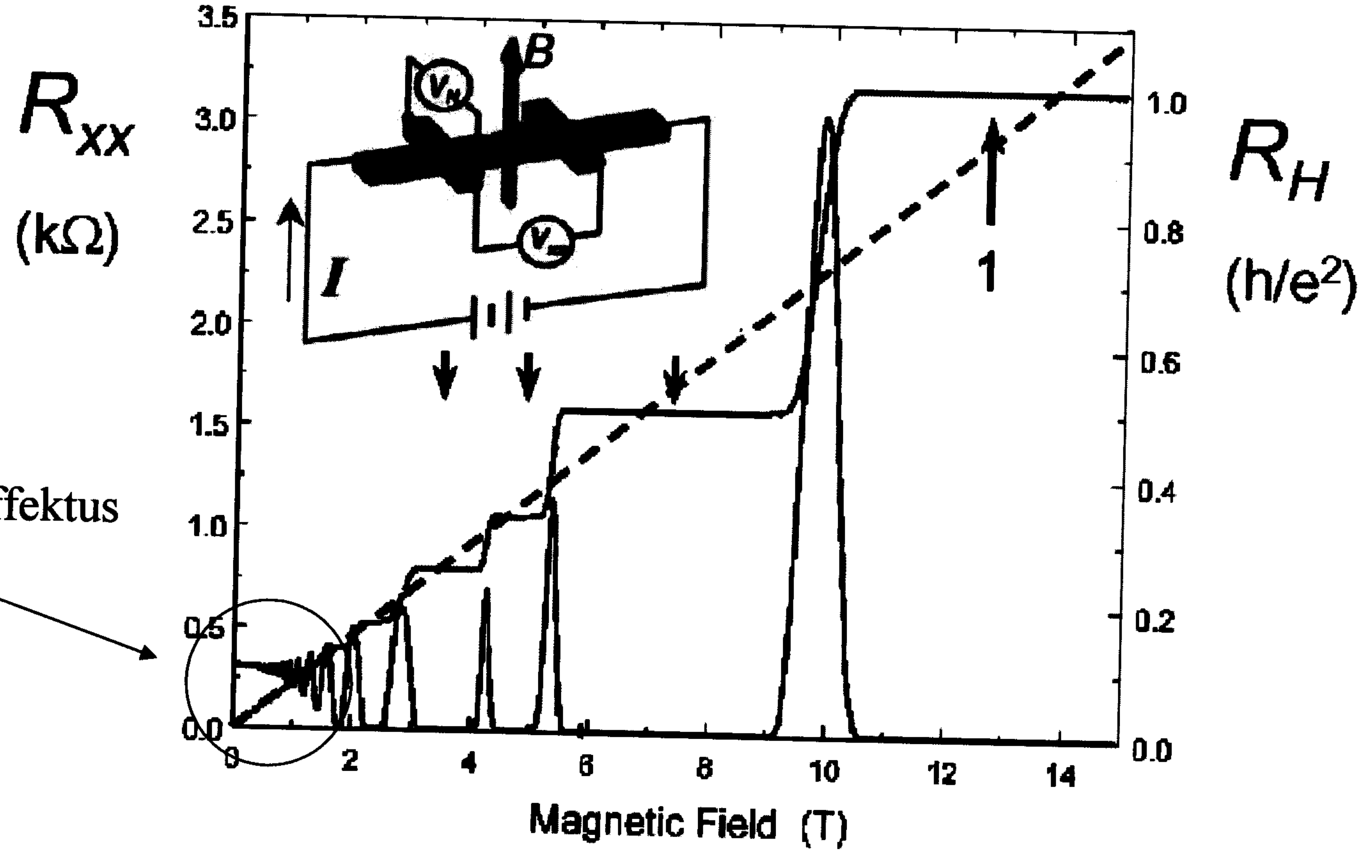
$$\frac{m\mathbf{v}}{\tau} = e\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m}{e^2\tau n_s} & \frac{-B}{en_s} \\ \frac{B}{en_s} & \frac{m}{e^2\tau n_s} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{J} = \boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{E} \Rightarrow \boldsymbol{\varrho} = \boldsymbol{\sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{m}{e^2\tau n_s} & \frac{-B}{en_s} \\ \frac{B}{en_s} & \frac{m}{e^2\tau n_s} \end{bmatrix}$$

$$R_H =: \frac{V_y}{I} = \frac{E_y}{j_x} = \varrho_{yx} = \frac{B}{en_s}, \text{ ha } j_y = 0$$



Egész kvantum Hall-effektus

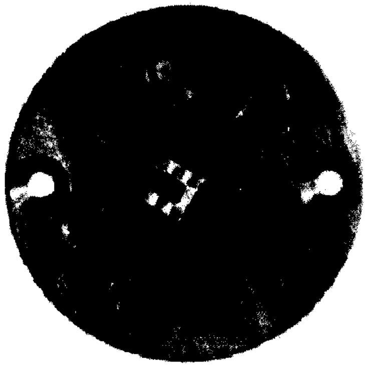


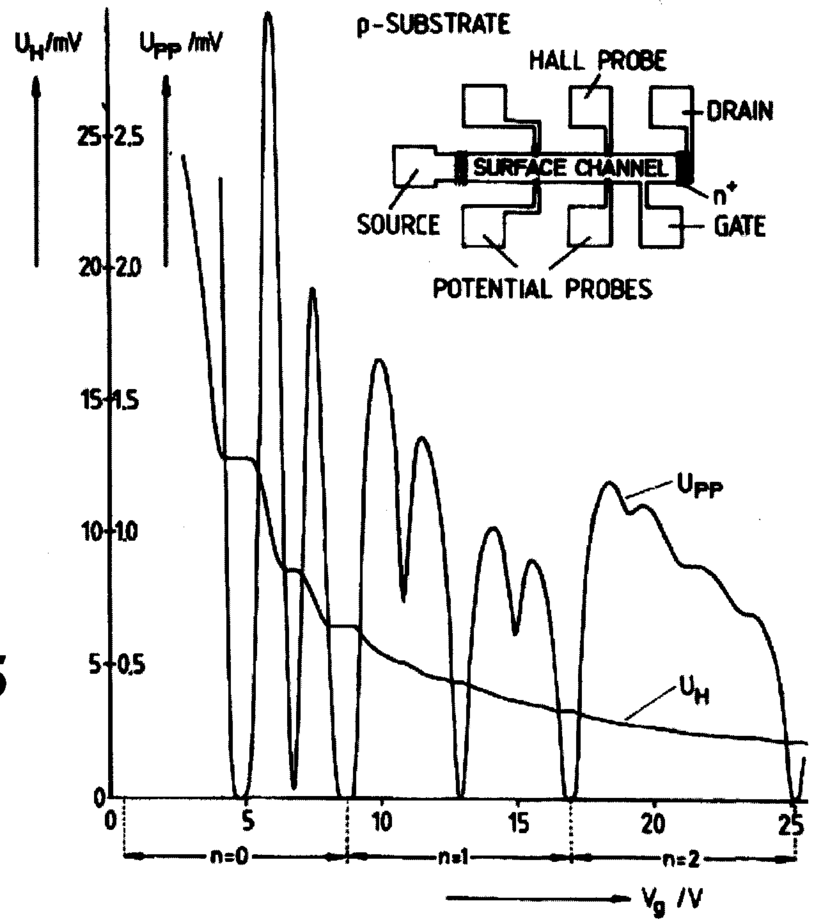
Klasszikus Hall-effektus

$$R_H = \frac{h/e^2}{i} = \frac{25812.807\ \text{Ohms}}{\text{integer}}$$

EGÉSZ KVANTUM HALL-EFFEKTUS

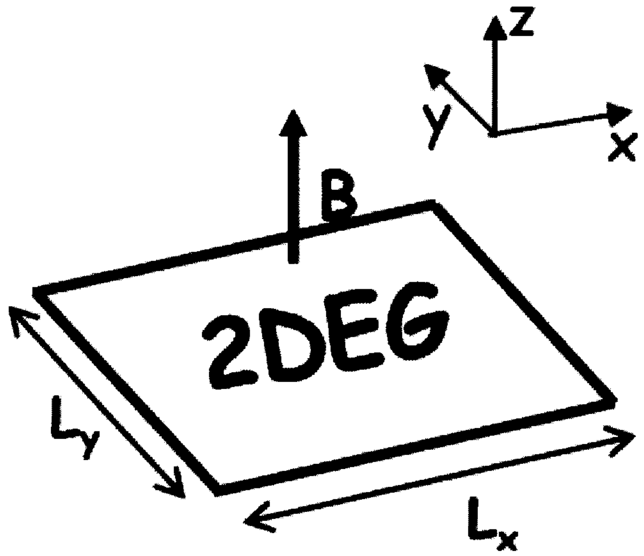
K. v. Klitzing, G. Dorda, M. Pepper: New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980)

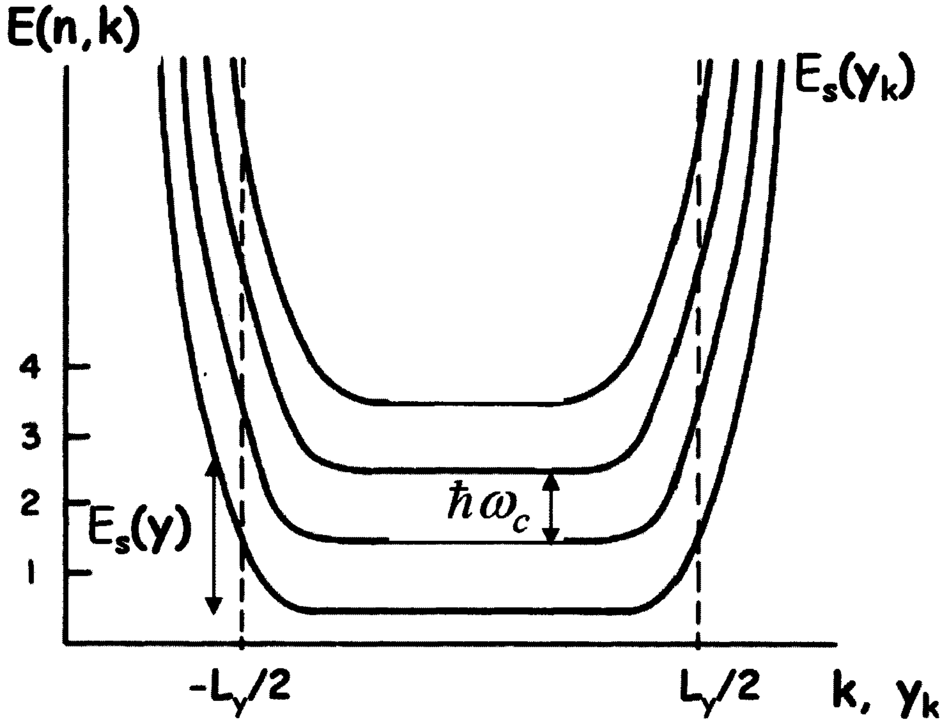




Klaus von Klitzing, Nobel-díj 1985

A minta széleinek szerepe, a Landau-nívók diszperziója





$$E(n,k) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c + E_s(y_k) \qquad y_k = \frac{\hbar k}{eB}$$

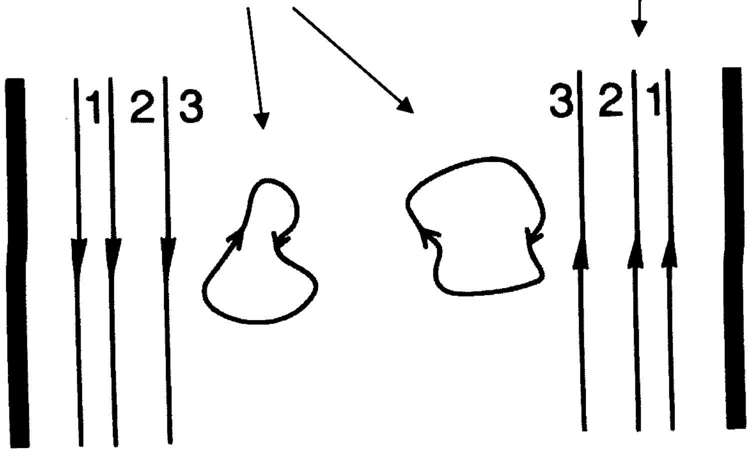
Landau-nívók A minta szélének hatása

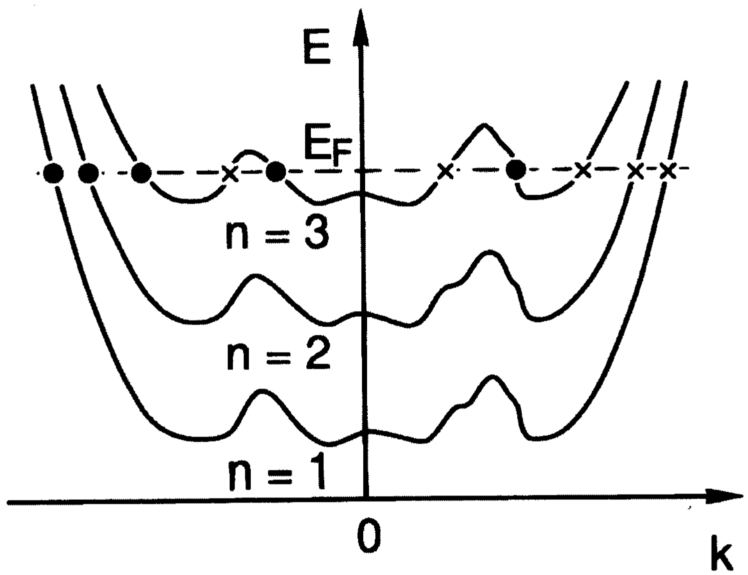
$$\omega_c = \frac{|e|B}{m}$$ ← ciklotron frekvencia

Lokalizált és élállapotok

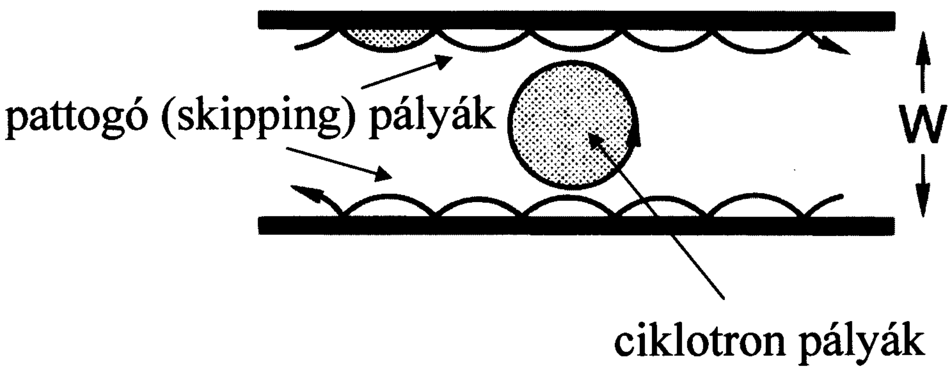
lokalizált állapotok

élállapotok (edge states), kiterjedt állapotok



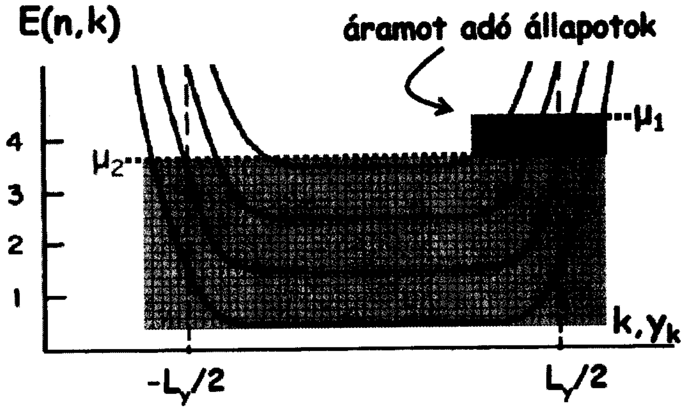


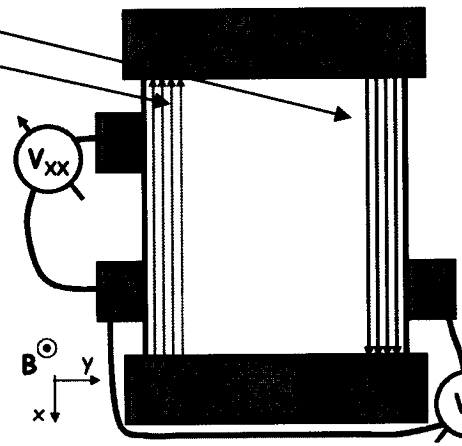
Klasszikus kép:



Élállapotok árama

Visszaszórás nélküli vezető élállapotok okozzák a kvantum Hall-effektust





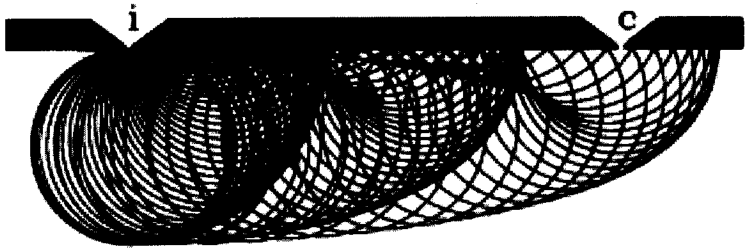
$$I=\frac{2e}{L_x}\sum_{n,k}\frac{1}{\hbar}\frac{\partial\varepsilon}{\partial k}=\frac{2e}{L_x}\sum_n\int_{\mu_2}^{\mu_1}\frac{L_x}{2\pi}\frac{1}{\hbar}\frac{\partial\varepsilon}{\partial k}dk=\frac{2e}{h}\sum_n\int_{\mu_2}^{\mu_1}d\varepsilon=\frac{2e}{h}M(\mu_1-\mu_2)$$

$$R_{XX}=\frac{V_{XX}}{I}=\frac{V_4-V_3}{I}=\frac{\mu_4-\mu_3}{eI}=\frac{\mu_2-\mu_2}{eI}=0$$

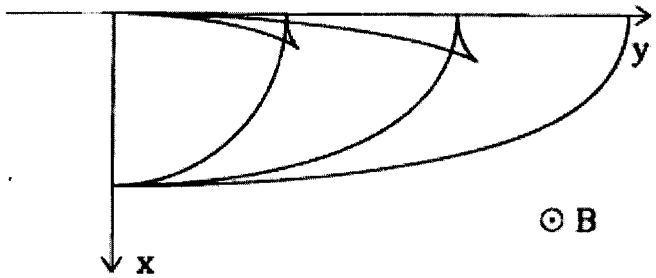
$$R_H=\frac{V_H}{I}=\frac{V_5-V_4}{I}=\frac{\mu_5-\mu_4}{eI}=\frac{\mu_1-\mu_2}{eI}=\frac{h}{e^2}\cdot\frac{1}{2M}$$

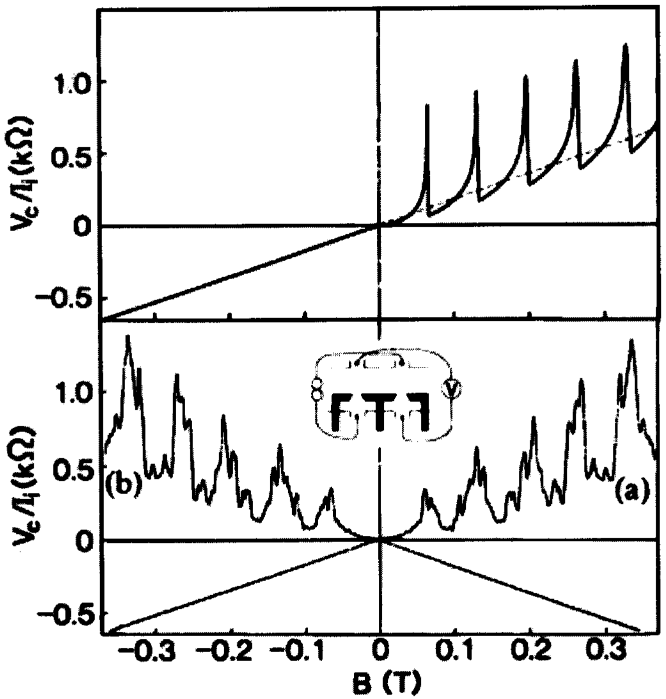
ELEKTRONOK FOKUSZÁLÁSA

injektor ← elektron → kollektor



Kausztika =
klasszikus pályák **burkolója**

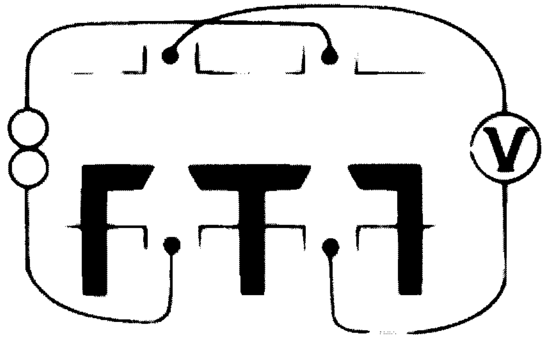




Számított
(szemiklasszikusan)

mért

általánosított
Hall-ellenállás



Kísérlet az élállapot közvetlen kimutatására

Konstrikció 2DEG mintában: